

# Prediktivní řízení s filtrací akčních a řízených veličin

Bc. Martin Moštěk

---

Diplomová práce  
2023



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky

---

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky  
Ústav automatizace a řídicí techniky

Akademický rok: 2022/2023

# ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Martin Moštěk**  
Osobní číslo: **A21130**  
Studijní program: **N0714A150006 Automatické řízení a informatika v průmyslu 4.0**  
Forma studia: **Prezenční**  
Téma práce: **Prediktivní řízení s filtrací akčních a řízených veličin**  
Téma práce anglicky: **Predictive control with filtering of manipulated and controlled variables**

## Zásady pro vypracování

1. Vytvořte základní simulinková schemata regulačních obvodů s prediktivními regulátory, založenými na zadaných modelech.
2. Odvoďte vztahy pro výpočet predikcí pro konkrétní vstupně-výstupní modely, a to jak pro systém s jedním vstupem a výstupem, tak pro systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy s barvicím polynommem v modelu šumu, kdy jsou vstupní a výstupní veličiny filtrovány.
3. Na základě základních obvodů vytvořte regulační obvody s prediktivními regulátory s barvicím polynommem v modelu šumu, kdy jsou vstupní a výstupní veličiny filtrovány.
4. Ověřte simulačně funkčnost vytvořených schemat simulačním řízením různých systémů.
5. Srovnajte kvalitu řízení pro případy s filtrací a bez filtrace vstupních a výstupních veličin.
6. Realizujte v prostředí Matlab/Simulink.
7. Regulátory naprogramujte jako S-funkce v programovacím jazyku Matlabu.

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

**Seznam doporučené literatury:**

1. BOBÁL, Vladimír. *Adaptivní a prediktivní řízení*, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2007, ISBN 978-80-7318-662-3
2. MIKLEŠ, Ján a FIKAR, Miroslav. *Process Modelling, Optimisation and Control*, Berlin: Springer-Verlag, 2008, ISBN 978-3642091124.
3. CAMACHO Eduardo and BORDONS, Carlo. *Model Predictive Control*. London: Springer-Verlag, 2004, ISBN 1-85223-694-3.
4. MIKLEŠ, Ján a FIKAR, Miroslav. *Modelovanie, Identifikácia a riadenie procesov II*. STU Bratislava, 2004, ISBN 80-227-2134-4.
5. ROSSITER, Anthony. *Model Based Predictive Control: a Practical Approach*. CRC Press, 2003, ISBN 0-8493-1291-4
6. CLARKE D.W., MOHTADI, C. and TUFFS, P.S. Generalized predictive control, part I: the basic algorithm. *Automatica*, 23, 1987, 137-148, ISSN 0005-1098.
7. CLARKE D.W., MOHTADI, C. and TUFFS, P.S. Generalized predictive control, part II: extensions and interpretations. *Automatica*, 23, 1987, 149-160, ISSN 0005-1098..
8. MORARI, M. and LEE J.H.. Model predictive control: past, present and future. *Computers and Chemical Engineering*, 23, 1999, 667-682, ISSN 0098-1354.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Marek Kubalčík, Ph.D.**  
Ústav řízení procesů

Datum zadání diplomové práce: **16. prosince 2022**  
Termín odevzdání diplomové práce: **24. května 2023**

**doc. Ing. Jiří Vojtěšek, Ph.D. v.r.**  
děkan



**prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc. v.r.**  
ředitel ústavu

Ve Zlíně dne 12. prosince 2022

### **Prohlašuji, že**

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

### **Prohlašuji,**

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne 24.5 . 2023

Martin Moštek v.r.  
podpis studenta

## **ABSTRAKT**

Diplomová práce se zabývá implementací a simulačním ověřováním prediktivního regulátoru s barvicím polynomem v modelu šumu. Byly odvozeny a implementovány vztahy pro prediktor pro řízení SISO soustav popsanych pomocí přenosových funkcí a MIMO soustav popsanych maticovými zlomky. Simulační ověřování proběhlo v prostředí MATLAB-Simulink. Výsledky řízení s a bez barvicího polynomu v modelu šumu byly porovnány.

Klíčová slova: Prediktivní řízení, modelování šumu, filtrace veličin

## **ABSTRACT**

This diploma thesis is focused on implementation and simulation verification of predictive controller with a colouring polynomial in a disturbance model. Relations for control of SISO systems described by transfer function and MIMO systems described by matrix fraction were derived and implemented. For simulation verification, MATLAB-Simulink was used. Performances of control with and without the colouring polynomial in the disturbance model were compared.

Keywords: Predictive control, disturbance modelling, filtration of variables

Tímto chci poděkovat vedoucímu této diplomové práce doc. Ing. Markovi Kubalčíkovi, Ph.D. za jeho skvělé vedení práce, ochotu a trpělivost. Také bych chtěl poděkovat své rodině za jejich podporu.

Prohlašuji, že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

# OBSAH

ÚVOD.....	8
I TEORETICKÁ ČÁST.....	9
1 PREDIKTIVNÍ ŘÍZENÍ.....	10
1.1 PRINCIP PREDIKTIVNÍHO ŘÍZENÍ.....	11
1.2 MODELÝ PROCESŮ.....	12
1.2.1 IMPULZNÍ ODEZVA.....	12
1.2.2 PŘECHODOVÁ FUNKCE.....	13
1.2.3 PŘENOSOVÁ FUNKCE.....	13
1.2.4 STAVOVÝ POPIS.....	13
1.3 ÚČELOVÁ FUNKCE.....	14
2 ODVOZENÍ PREDIKTORU.....	16
2.1 OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ.....	18
2.2 OMEZENÍ.....	19
2.2.1 TVRDÁ OMEZENÍ.....	20
2.2.2 MĚKKÁ OMEZENÍ.....	22
2.2.3 FILTRACE.....	23
II PRAKTICKÁ ČÁST.....	24
3 VÝPOČET PREDIKCÍ.....	25
3.1 SISO SYSTÉM BEZ FILTRACE, $C=1$ .....	25
3.2 SISO SYSTÉM S FILTRACÍ, $C\neq 1$ .....	27
3.3 MIMO SYSTÉM BEZ FILTRACE, $C=1$ .....	29
3.4 MIMO SYSTÉM BEZ FILTRACE, $C\neq 1$ .....	32
4 SIMULAČNÍ OVĚŘOVÁNÍ.....	35
4.1 VYBRANÉ SISO SYSTÉMY.....	37
4.1.1 REALIZACE V PROSTŘEDÍ MATLAB-SIMULINK.....	39
4.1.2 NEKMITAVÝ SYSTÉM $G_1$ .....	40
4.1.3 NEKMITAVÝ SYSTÉM $G_2$ .....	43
4.1.4 NEKMITAVÝ SYSTÉM $G_3$ .....	46
4.1.5 KMITAVÝ SYSTÉM $G_4$ .....	49
4.1.6 KMITAVÝ SYSTÉM $G_5$ .....	52
4.2 VYBRANÉ TITO SYSTÉMY.....	55
4.2.1 REALIZACE V PROSTŘEDÍ MATLAB-SIMULINK.....	56
4.2.2 NEKMITAVÝ SYSTÉM $G_6$ .....	57
4.2.3 KMITAVÝ SYSTÉM $G_7$ .....	61
4.3 SHRNUÍ VÝSLEDKŮ.....	65
ZÁVĚR.....	66
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	67

<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK .....</b>	<b>68</b>
<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>69</b>
<b>SEZNAM TABULEK.....</b>	<b>71</b>
<b>SEZNAM PŘÍLOH.....</b>	<b>72</b>



## ÚVOD

Prediktivní řízení [1,2,4] je v současnosti jednou z nejpobulárnějších metod řízení. Za jeho hlavní výhodu lze považovat možnost zahrnout omezení do výpočtu hodnot akčního zásahu vhodněji, než je tomu u jiných metod. Na druhou stranu, větší výpočetní složitost rostoucí s délkou predikčního horizontu zůstává jednou z jeho největších slabin. Z toho důvodu byly metody prediktivního řízení zpočátku vyvíjeny pro potřeby chemického průmyslu, kde sloužily k regulaci pomalých chemických procesů. S rozvojem výpočetní techniky však prediktivní řízení proniká do stále nových oblastí.

Prediktivní řízení je založeno na jednoduché myšlence využívající model řízeného systému pro predikování odezvy tohoto systému. Algoritmus prediktivního řízení v každém časovém kroku optimalizuje budoucí chování systému dle zvoleného kritéria výpočtem konečné sekvence akčních zásahů. Kritérium v sobě může zahrnovat omezení. V pořadí první akční zásah získané optimální sekvence je potom aplikován a celý proces se opakuje v dalším časovém kroku. Toto se nazývá jako koncept pohyblivého horizontu.

Poruchová veličina způsobuje zhoršení vlastností řídicího procesu. Nejlepším způsobem, jak omezit vliv poruchových veličin, je zahrnout je přímo v modelu procesu. [5] V případě vysokofrekvenční neměřitelných poruch, které nelze zahrnout do modelu, můžeme využít barvicího polynomu v modelu šumu. Polynom se pak chová jako dolní propust. Správným nastavením filtru pak můžeme zlepšit robustnost systému a omezit nepřiměřenou reakci systému na poruchovou veličinu.

Práce se zabývá implementací prediktivního regulátoru s barvicím polynomem v modelu šumu. Byly uvažovány a analyzovány jak systémy s jedním vstupem a jedním výstupem tak systémy se dvěma vstupy a dvěma výstupy. Filtr je často důležitým ladicím parametrem při praktických aplikacích prediktivního řízení založených na vstupně-výstupních modelech. Volba filtru má přímý dopad na kvalitu řízení. V práci je uvedeno odvození predikčních rovnic pro případ s barvicím filtrem pro konkrétní modely řízených systémů. V případě systémů s jedním vstupem s jedním výstupem se jedná o modely ve formě přenosových funkcí, v případě systémů se dvěma vstupy a dvěma výstupy o modely ve formě maticových zlomků. Kvalita řízení pro případy s filtrem a bez filtru byla vyhodnocena a porovnána.

## **I. TEORETICKÁ ČÁST**

## 1 PREDIKTIVNÍ ŘÍZENÍ

Pojem prediktivní řízení (anglicky Model Predictive Control – MPC) zahrnuje velké množství metod, založených na jistých společných charakteristikách: [1]

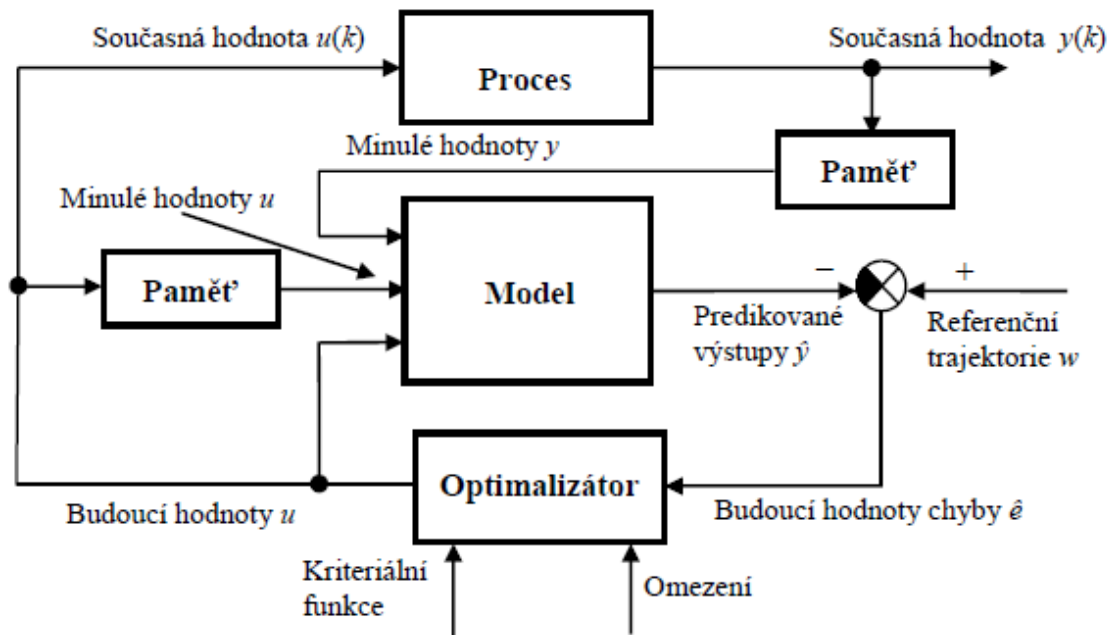
- Matematický model systému je použit k predikci budoucích hodnot výstupu systému
- Známe průběh žádané hodnoty v budoucím čase
- Výpočet posloupností budoucích akčních zásahů zahrnuje minimalizaci vhodné účelové funkce (obvykle kvadratické) s budoucími trajektoriemi přírůstků řízení a regulační odchylky
- Pouze první hodnota akčního zásahu je realizována a celý postup se opakuje v další periodě vzorkování. Tento proces se nazývá jako pohyblivý horizont.

Rozdíl, mezi různými algoritmy MPC spočívá především v použitém modelu systému a minimalizované váhové funkci. [3]

Prediktivní řízení pak ve srovnání s jinými řídicími metodami nabízí řadu výhod: [3]

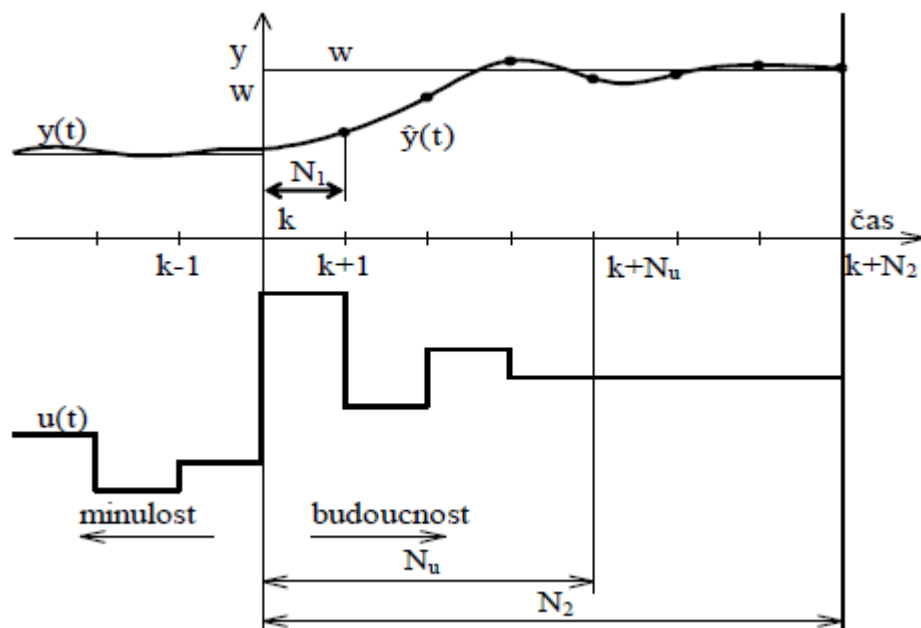
- Možnost řízení celé řady procesů, od procesů s relativně jednoduchou dynamikou, až po komplexní systémy, včetně systémů s dopravním zpožděním, neminimálně fázových systémů a nestabilních systémů
- Dokáže se vyrovnat s dopravním zpožděním
- Umožňuje kompenzaci měřitelných poruch
- Umožňuje zahrnutí omezení veličin přímo při návrhu regulátoru
- Metodika založená na základních principech umožňuje budoucí rozšíření

## 1.1 Princip prediktivního řízení



Obrázek 1 Základní struktura prediktivního regulátoru [2]

Na obrázku 1 je uvedena základní struktura prediktivního regulátoru. Model řízeného procesu je součástí regulátoru a s jeho pomocí z minulých hodnot predikujeme  $N_2 - N_1$  budoucích výstupů  $\hat{y}$ . [2]



Obrázek 2 Princip prediktivního řízení [2]

Na obrázku 2 je zobrazen princip prediktivního řízení. Prediktivní řízení uvažuje tři časové intervaly – horizonty.  $N_1$  je horizont minimální,  $N_2$  je horizont maximální a  $N_u$  je horizont řídicí. Účel minimálního horizontu je kompenzace dopravního zpoždění, často tedy nabývá hodnoty 1. Maximální horizont je vhodné nastavit tak, aby pokrýval velkou část přechodového děje. Řídicí horizont určuje interval, za kterým se již nebude měnit hodnota akčního zásahu.

## 1.2 Modely procesů

V prediktivním řízení je možné použít libovolný model procesu. Model však musí dostatečně vystihovat dynamické vlastnosti systému. [2,4] Nejčastěji používanými modely jsou pak modely lineární, protože v případě bez omezení můžeme analyticky vypočítat hodnoty budoucích akčních zásahů. [1]

Model procesu je pak potřebný pro výpočet predikcí budoucích hodnot procesu. Některé modely v sobě přímo zahrnují model poruchy, v jiných modelech se poruchy předpokládají jako konstantní. [1,4]

### 1.2.1 Impulzní odezva

Impulzní odezva je dána rovnicí

$$y(k) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i u(k-i) \quad (1)$$

Kde  $h_i$  je vzorkovaný výstup vybuzený jednotkovým impulsem. Z praktických důvodů je pak posloupnost omezena na  $N$  hodnot.[3] Takový model se pak označuje jako FIR (finite impulse response).

$$y(k) = \sum_{i=1}^N h_i u(k-i) = H(z^{-1})u(k) \quad (2)$$

Kde

$$H(z^{-1}) = h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_N z^{-N} \quad (3)$$

Výhodou této metody je fakt, že nepotřebujeme žádné předchozí informace o systému, čímž dochází ke zjednodušení identifikace a zároveň to umožňuje identifikovat i komplexní procesy. Například procesy neminimálně fázové nebo s dopravním zpožděním. [3]

Nevýhodou této metody je potřeba vysoké hodnoty parametru  $N$  (40-50). Tato metoda také dovoluje popisovat pouze stabilní systémy [1-4]

### 1.2.2 Přechodová funkce

Dalším modelem je model založený na přechodové funkci. Tento model je podobný FIR modelu a sdílí s ním i stejné výhody i nevýhody. Rozdílem oproti je fakt, že vstupní signál není jednotkovým impulzem, ale skokem. [3]

Stejně jako u FIR modelu se omezuje počet členů funkce. Pro stabilní procesy se používá diskrétní přechodová funkce. [2]

$$y(k) = y_0 + \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(k-i) = y_0 + G(z^{-1})(1 - z^{-1})u(k) \quad (4)$$

Díky jednoduchosti získání impulzní a přechodové charakteristiky se modely na nich založené na často používají v průmyslových aplikacích. [1,2]

### 1.2.3 Přenosová funkce

Tento model je využíván například v GPC (Generalized Predictive Control), UPC (Unified Predictive Control), EHAC (Extended Horizon Adaptive Control) a další. [3]

Výstup je pak dán vztahem

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (5)$$

Kde

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} \quad (6)$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n} \quad (7)$$

Výhodou tohoto modelu je možnost vyjádření nestabilních procesů. Nevýhodou je nutnost znalosti řádů polynomů  $A$  a  $B$ . [1-4]

### 1.2.4 Stavový popis

Model procesu v diskrétním stavovém popisu je pak dán jako

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (8)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (9)$$

Kde  $\mathbf{x}$  představuje stavový vektor,  $\mathbf{y}$  představuje výstup procesu a  $\mathbf{u}$  představuje vstupy procesu. Matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}$  jsou pak matice definující stavový popis procesu. Hodnota matice  $\mathbf{D}$  bývá v reálných systémech rovna nule. [5]

### 1.3 Účelová funkce

Různé typy MPC algoritmů využívají různých účelových funkcí. Obecným cílem pak je řízení budoucího výstupu  $\mathbf{y}$  dle referenčního signálu  $w$  za pomoci akčního zásahu  $\mathbf{u}$ .

Obecný zápis těchto funkcí pak je ve tvaru

$$\begin{aligned} J(k) &= \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) (\hat{\mathbf{y}}(k+j) - w(k+j))^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) \Delta u(k+j-1)^2 \\ &= \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) (e(k+j))^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) \Delta u(k+j-1)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Kde  $\hat{\mathbf{y}}(k+j)$  představuje výstup  $j$  budoucích kroků predikovaných na základě informací dostupných v čase  $k$ ,  $w(k+j)$  představuje posloupnost žádané veličiny a  $\Delta u(k+j)$  představuje posloupnost budoucích přírůstků akčního zásahu, které je potřeba vypočítat. [1]

Parametry  $N_1$ ,  $N_2$  a  $N_u$  nazýváme jako minimální, maximální a řídicí horizont. Hodnota řídicího horizontu se nemusí shodovat s hodnotou maximálního horizontu. Horizonty  $N_1$  a  $N_2$  označují interval v budoucnosti, po který je potřeba sledovat trajektorii žádané hodnoty. Hodnota  $N_1$  by měla být alespoň  $T_d + 1$ , kde  $T_d$  představuje dopravní zpoždění procesu. Volbou dostatečně velké hodnoty  $N_1$  můžeme eliminovat problém neminimálně fázového chování procesu. [1,3] Hodnota parametru  $N_2$  by měla pokrývat důležitou část přechodové charakteristiky, obvykle je volena stejná jako hodnota  $T_{90}$ .  $T_{90}$  představuje takový čas, za který se výstupní veličina dostane z hodnoty 10 % na 90 %. [1]

Hodnotou řídicího horizontu  $N_u$  pak můžeme snížit výpočetní náročnost metody.

Parametry  $\delta(j)$  a  $\lambda(j)$  jsou sekvence ovlivňující budoucí chování procesu. Obvykle jsou voleny jako konstanty nebo exponenciální řady. [3]

Prediktivní řízení vyžaduje znalost budoucího průběhu žádané veličiny, systém tak může zareagovat na změnu dříve, než k ní dojde a vyhnout se tak zpoždění v odezvě procesu. [3]

Pokud průběh žádané veličiny znám není, nejčastěji se uvažuje jako konstantní a rovna aktuální žádané hodnotě. Další možností je aproximace trajektorie vycházející z aktuální hodnoty regulované veličiny do konečné žádané hodnoty. Tohoto můžeme dosáhnout například filtrem prvního řádu. [1-4]

$$w(k) = y(k) \tag{11}$$

$$w(k + j) = \alpha w(k + j - 1) + (1 - \alpha)w^\infty; k = 1 \dots N$$

Parametr  $\alpha$  je pak v pohybuje mezi 0 a 1 a určuje plynulost trajektorie. Pokud se parametr blíží nule, pak je průběh nejpomalejší, pokud se blíží jedné, pak je průběh nejrychlejší. [1,6]

Další možností je pak například využití polynomu  $P(z^{-1})$ . Filtr má zesílení rovno jedné a sleduje trajektorii  $\frac{1}{P}w$ . Filtr odpovídající předešlému filtru prvního řádu je pak dán vztahem [1,2]

$$P(z^{-1}) = \frac{1 - \alpha z^{-1}}{1 - \alpha} \tag{12}$$



## 2 ODVOZENÍ PREDIKTORU

Prvním krokem k odvození optimálního prediktoru výstupní veličiny. Začneme s CARIMA modelem ve tvaru

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta}n(k) \quad (13)$$

V rovnici (13) používáme  $u(k-1)$ , protože  $u(k)$  je neznámá veličina, kterou musíme vypočítat. Polynom  $B$  pak má nenulový absolutní člen.

Protože tuto rovnici uvažuje  $j$  kroků do budoucnosti, vynásobíme ji členem  $z^j$  a dostaneme

$$y(k+j) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k+j-1) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})}n(k+j) \quad (14)$$

Poslední člen této rovnice pak obsahuje minulé a budoucí hodnoty neměřitelné poruchy  $n$ . Můžeme je rozdělit polynomiálním dělením členu  $\frac{C}{\Delta A}$  a oddělením prvních  $j$  členů s kladnými mocninami  $z$ .

$$\frac{C(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})} = E_j(z^{-1}) + (z^{-j})\frac{F_j(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})} \quad (15)$$

Kde polynom  $E_j$  je řádu  $j-1$ . Dosazením do (14) pak dostáváme

$$y(k+j) = \frac{B}{A}u(k+j-1) + E_j n(k+j) + (z^{-j})\frac{F_j}{\Delta A}n(k) \quad (16)$$

Poslední člen nyní obsahuje aktuální hodnotu poruchy  $n$ , kterou můžeme dopočítat z rovnice (13)

$$n(k) = \frac{A}{C}y(k) - \frac{B}{C}u(k-1) \quad (17)$$

Dosazením do zpět do rovnice (16) získáme

$$\begin{aligned} y(k+j) &= \frac{B}{A}u(k+j-1) - \frac{F_j B}{\Delta A C}\Delta u(k-1) + \frac{F_j}{C}y(k) + E_j n(k+j) \\ &= \left[ \frac{B}{\Delta A} - z^{-j} \frac{F_j B}{\Delta A C} \right] \Delta u(k+j-1) + \frac{F_j}{C}y(k) + E_j n(k+j) \\ &= \frac{B}{C} \left[ \frac{C}{\Delta A} - z^{-j} \frac{F_j}{\Delta A} \right] \Delta u(k+j-1) + \frac{F_j}{C}y(k) + E_j n(k+j) \end{aligned} \quad (18)$$

Substitucí (15) do členu obsahujícího  $\Delta u(k+j-1)$  obdržíme

$$y(k+j) = \frac{B}{C} \left[ E_j + z^{-j} \frac{F_j}{\Delta A} - z^{-j} \frac{F_j}{\Delta A} \right] \Delta u(k+j-1) + \frac{F_j}{C} y(k) + E_j n(k+j) \quad (19)$$

Opět oddělíme neznámé přírůstky od známých pomocí polynomiálního dělení.

$$\frac{B(z^{-1})E(z^{-1})}{C(z^{-1})} = G_j(z^{-1}) + z^{-j} \frac{\Gamma_j(z^{-1})}{C(z^{-1})} \quad (20)$$

Dostáváme výsledný tvar pro budoucí hodnoty výstupu procesu

$$y(k+j) = G_j \Delta u(k+j-1) + \frac{\Gamma_j}{C} \Delta u(k-1) + \frac{F_j}{C} y(k) + E_j n(k+j) \quad (21)$$

Je zřejmé, že pro optimální predikci  $y(k+j)$  na základě známých informací do kroku  $k$  musíme zanedbat budoucí hodnoty poruchové veličiny

$$\hat{y}(k+j) = G_j \Delta u(k+j-1) + \frac{\Gamma_j}{C} \Delta u(k-1) + \frac{F_j}{C} y(k) \quad (22)$$

$$\hat{y}(k+j) = G_j \Delta u(k+j-1) + y_0(k+j) \quad (23)$$

Tedy pro odvození  $j$ -krokového prediktoru musíme vyřešit dvě rovnice polynomiálního dělení, nebo dvě ekvivalentní Diofantické rovnice

$$C = E_j \Delta A + z^{-j} F_j \quad (24)$$

$$B E_j = G_j C + z^{-j} \Gamma_j \quad (25)$$

Pro lepší pochopení prediktoru je lepší analyzovat rovnici (23) a její členy. Uvažujme všechny budoucí přírůstky řízení jako nulové

$$\hat{y}(k+j) = y_0(k+j)$$

Člen  $y_0$  tedy můžeme nazvat volnou odezvou procesu, kdy hodnota vstupu zůstává na poslední vypočítané hodnotě akčního zásahu  $u(k-1)$ .

Obdobně můžeme uvažovat, že je proces v čase  $k$  v ustáleném stavu a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je ustálený stav nulový. T tohoto vyplývá, že volná odezva  $y_0(k+j)$  je nulová. Je-li v čase  $k$  proces vystaven jednotkovému skoku, výstup procesu je dán rovnicí

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j) &= G_j(z^{-1}) \Delta u(k+j-1) \\ &= g_{j0} \Delta u(k+j-1) + g_{j1} \Delta u(k+j-2) + \dots + g_{j,j-1} \Delta u(k) \\ &= g_{j,j-1} \end{aligned} \quad (26)$$

Polynom  $G_j(z^{-1})$  tedy obsahuje diskretní přechodovou funkci.

## 2.1 Optimální řízení

Váhová funkce je dána vztahem (10). Pro zjednodušení předpokládejme že  $N_1 = 1, N_u = N_2, \delta(j) = 1$ . Musíme tedy vypočítat všechny predikce v čase  $k+N_2$ . Můžeme zavést vektory predikcí výstupu, volné odezvy, budoucích přírůstků akčního zásahu a budoucí trajektorie žádané hodnoty

$$\hat{\mathbf{y}}^T = [\hat{y}(k+1), \hat{y}(k+2), \dots, \hat{y}(k+N_2)] \quad (27)$$

$$\mathbf{y}_0^T = [y_0(k+1), y_0(k+2), \dots, y_0(k+N_2)] \quad (28)$$

$$\Delta \mathbf{u}^T = [\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+N_2-1)] \quad (29)$$

$$\mathbf{w}^T = [w(k+1), w(k+2), \dots, w(k+N_2)] \quad (30)$$

Pro vektorový zápis rovnice (23) vytvoříme matici  $\mathbf{G}$  obsahující koeficienty přechodové charakteristiky

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_3 & g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N_2} & g_{N_2-1} & g_{N_2-2} & \dots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Pokud budeme uvažovat horizont  $N_1$ , tak musíme prvních  $N_1 - 1$  řádků matice  $\mathbf{G}$  odstranit. Obdobně, horizont  $N_u$  způsobí snížení počtu sloupců na  $N_u$ . Matice  $\mathbf{G}$  má tedy rozměry  $(N_2 - N_1 + 1; N_u)$ .

Prediktor tedy může být přepsán do vektorové formy

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{y}_0 \quad (32)$$

Účelová funkce ve vektorové formě

$$\begin{aligned} J &= (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{w})^T (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{w}) + \lambda \Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{G}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{y}_0 - \mathbf{w})^T (\mathbf{G}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{y}_0 - \mathbf{w}) + \lambda \Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (33)$$

Pak roznásobením a úpravou obdržíme

$$\begin{aligned} J &= (\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{y}_0 - \mathbf{w})^T (\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{y}_0 - \mathbf{w}) + \lambda \Delta\mathbf{u}^T \Delta\mathbf{u} \\ &= \Delta\mathbf{u}^T (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}) \Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{G}^T (\mathbf{y}_0 - \mathbf{w}) + (\mathbf{y}_0 - \mathbf{w})^T \mathbf{G} \Delta\mathbf{u} \\ &\quad + (\mathbf{y}_0 - \mathbf{w})^T (\mathbf{y}_0 - \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (34)$$

Gradient  $\mathbf{g}$  a Hessova matice  $\mathbf{H}$  jsou definovány jako

$$\mathbf{g}^T = \mathbf{G}^T (\mathbf{y}_0 - \mathbf{w}) \quad (35)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I} \quad (36)$$

Rovnici (34) pak můžeme přepsat do podoby

$$J = 2\mathbf{g}^T \Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{H} \Delta\mathbf{u} \quad (37)$$

Minimum účelové funkce (37) získáme tak, že položíme derivaci  $\frac{\partial J}{\partial \Delta\mathbf{u}}$  rovnu nule. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= 2\mathbf{g}^T \Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{H} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\mathbf{u} &= -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{g} \end{aligned} \quad (38)$$

Touto rovnicí získáme celou trajektorii budoucích přírůstků řízení představující řízení v otevřeném regulačním obvodu. Abychom regulační obvod uzavřeli, použijeme pouze první element  $\Delta\mathbf{u}$ , tj.  $\Delta\mathbf{u}(k)$ . Celý postup pak opakujeme v periodě vzorkování  $k+1$ . Tato strategie je známá jako princip pohyblivého horizontu.

## 2.2 Omezení

Algoritmus, odvozený v kapitole 2.1 neuvažoval omezení. V reálném světě však omezení existují vždy. Nejčastěji se jedná omezení vstupů, které se mohou pohybovat pouze v určitém rozsahu hodnot (průtok nemůže být negativní, ventil nelze otevřít na víc než 100 %). Také však existují doporučení a limity pro výstupní veličiny procesů. [1,4]

Schopnost pracovat s omezeními je jednou z důležitých vlastností prediktivního řízení, která zapříčinila jeho rozšíření v průmyslu. Velké množství průmyslových aplikací pracuje s hodnotami blízko omezením, nebo přímo na nich, jinak je totiž proces zbytečně naddimenzován.[1]

Jedna z používaných metod omezení v praxi je řešení optimalizační úlohy bez omezení a následné omezení výsledku – saturace. Existují však alespoň dva důvody, proč je takovýto způsob nevhodný [1]:

- Nelze reagovat na budoucí hodnoty trajektorie. Protože je řízení limitované, ztrácí schopnost proces ovlivňovat. Proces se může stát nestabilním, může překročit bezpečné hodnoty nebo může přejít do nouzového režimu. Tímto může dojít k velkým ekonomickým ztrátám.
- V případě vícerozměrového řízení, existují vztahy mezi jednotlivými elementy řízení. Nastavením elementu na jeho limit pak může výrazně změnit odezvu procesu a kvalitu regulace.

Použitá účelová funkce je kvadratického tvaru (37). Pokud budeme uvažovat lineární omezení vzhledem k vektoru řízení  $\Delta u$ , je výsledný optimalizační problém v tvaru kvadratického programování, pro které existují vhodné algoritmy řešení. [1,4]

Obecně pak lze problém se zahrnutím omezení zapsat jako

$$\min_{\Delta u} 2\mathbf{g}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} \text{ vzhledem k } \mathbf{A} \Delta \mathbf{u} \geq \mathbf{b} \quad (39)$$

Omezení pak rozlišujeme na tvrdá (hard constraints) a měkká (soft constraints):

- Tvrdá omezení jsou omezení, která musí být dodržena a nelze je za žádných podmínek překročit.
- Měkká omezení jsou omezení, které je možné překročit, ale pokud je to možné, měli by být dodrženy.

### 2.2.1 Tvrdá omezení

Nejčastěji využívané omezení:

$$\text{Omezení změny akčního zásahu} \quad \Delta u_{min} \leq u(k) - u(k-1) \leq \Delta u_{max}$$

$$\text{Omezení akčního zásahu} \quad u_{min} \leq u(k) \leq u_{max}$$

$$\text{Omezení výstupní veličiny} \quad y_{min} \leq y(k) \leq y_{max}$$

$$\text{Omezení překmitu} \quad y(k+j) \leq w(k)$$

Všechna tato omezení lze vyjádřit maticovou nerovností

$$\mathbf{A}\mathbf{u} \leq \mathbf{b} \quad (40)$$

### 2.2.1.1 Omezení změny akčního zásahu

$$\begin{array}{l} \Delta u(k) \leq \Delta u_{max} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} \Delta u_{max} \\ \Delta u_{max} \\ \Delta u_{max} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \mathbf{I}\mathbf{u} \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \end{array} \quad \begin{array}{l} \Delta u(k) \geq \Delta u_{min} \\ -\Delta u(k) \leq -\Delta u_{min} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} -\Delta u_{min} \\ -\Delta u_{min} \\ -\Delta u_{min} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ -\mathbf{I}\mathbf{u} \leq -\Delta \mathbf{u}_{max} \end{array} \quad (41)$$

### 2.2.1.2 Omezení akčního zásahu

$$\begin{array}{l} u(k) \leq u_{max} \\ u(k-1) + \Delta u(k) \leq u_{max} \\ \Delta u(k) \leq u_{max} - u(k-1) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} u_{max} - u(k-1) \\ u_{max} - u(k-1) \\ u_{max} - u(k-1) \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}\mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{max} - \mathbf{u}_{k-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} u(k) \geq u_{min} \\ -u(k-1) - \Delta u(k) \leq -u_{min} \\ -\Delta u(k) \leq -\Delta u_{min} + u(k-1) \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} -u_{min} + u(k-1) \\ -u_{min} + u(k-1) \\ -u_{min} + u(k-1) \\ \vdots \end{bmatrix} \\ -\mathbf{T}\mathbf{u} \leq -\mathbf{u}_{min} + \mathbf{u}_{k-1} \end{array} \quad (42)$$

### 2.2.1.3 Omezení výstupu soustavy

$$\begin{aligned}
 & y(k) \leq y_{max} \\
 & \mathbf{G}\mathbf{u} + y_0 \leq y_{max} \\
 & \mathbf{G}\mathbf{u} \leq y_{max} - y_0 \\
 & \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_3 & g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N_2} & g_{N_2-1} & g_{N_2-2} & \dots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix} \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} y_{max} - y_0(k+1) \\ y_{max} - y_0(k+2) \\ y_{max} - y_0(k+3) \\ \vdots \\ y_{max} - y_0(k+N_2) \end{bmatrix} \\
 & y(k) \geq y_{min} \\
 & -\mathbf{G}\mathbf{u} - y_0 \leq -y_{min} \\
 & -\mathbf{G}\mathbf{u} \leq y_{min} + y_0 \\
 & \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_3 & g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N_2} & g_{N_2-1} & g_{N_2-2} & \dots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix} \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} y_{min} - y_0(k+1) \\ y_{min} - y_0(k+2) \\ y_{min} - y_0(k+3) \\ \vdots \\ y_{min} - y_0(k+N_2) \end{bmatrix} \quad (43)
 \end{aligned}$$

Omezení pak dosadíme do nerovnice (40) a dostáváme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{T} \\ -\mathbf{T} \\ \mathbf{G} \\ -\mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} \Delta u_{max} \\ \Delta u_{min} \\ u_{max} \\ u_{min} \\ y_{max} - y_0 \\ y_{min} - y_0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Kde jednotková matice  $\mathbf{I}$ , dolní trojúhelníková matice  $\mathbf{T}$  a matice  $\mathbf{G}$  jsou čtvercové rozměru  $N_u$ . Na pravé straně nerovnice jsou sloupcové vektory délky  $N_u$ .

### 2.2.2 Měkká omezení

Ačkoli vstupní omezení můžeme dodržet vždy, přítomnost omezení může způsobit neřešitelnost optimalizačního problému. Z praktického hlediska je proto vhodné zavést tzv. měkké omezení, kdy omezení rozšíříme o proměnnou  $\varepsilon$ . Velikost této proměnné se pak budeme snažit minimalizovat. Omezení pak bude mít tvar

$$-\varepsilon + y_{min} \leq y \leq y_{max} + \varepsilon; \quad \varepsilon > 0 \quad (45)$$

Účelová funkce pak nabude podoby

$$\mathbf{J} = 2\mathbf{g}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} + \varepsilon^T \bar{\mathbf{H}} \varepsilon \quad (46)$$

### 2.2.3 Filtrace

V případě, že polynom v modelu šumu  $C(z^{-1})$  v rovnici (13) není roven jedné, dochází k drobné změně predikcí. Vycházíme ze stejné Diofantické rovnice (24), pak [7]

$$C(z^{-1})\hat{y}(k+j) = G_j\Delta u(k+j-1) + F_j y(k) \quad (47)$$

Rovnici (47) můžeme přepsat do tvaru

$$\hat{y}(k+j) = G_j\Delta u^f(k+j-1) + F_j y^f(k) \quad (48)$$

Kde „f“ označuje filtraci polynomem  $1/C(z^{-1})$ . Účelová funkce je však vyjádřena ve vztahu k  $\Delta u(k+j)$ ;  $j = 0, 1, \dots$ , a ne k  $\Delta u^f$ , takže musíme predikční rovnici modifikovat. Uvažujme [7]

$$G_j(z^{-1}) = G'_j(z^{-1})C(z^{-1}) + z^{-1}\Gamma_j(z^{-1}) \quad (49)$$

Kombinací (47) a (48) pak dostáváme

$$\hat{y}(k+j) = G'_j\Delta u^f(k+j-1) + \Gamma_j u^f(k-1) + F_j y^f(k) \quad (50)$$

Další možností predikcí s modelem šumu je přímá predikce na základě CARIMA modelu. Tato varianta je rozvedena v kapitole 3.

Velkou výhodou je fakt, že můžeme  $C$ -filtr použít k úpravě citlivosti procesu na poruchovou veličinu, a to bez narušení schopnosti procesu sledovat průběh žádané veličiny. Návrh regulátoru tedy můžeme provést ve dvou krocích. V prvním kroku navrhne samotný regulátor a dalším krokem přidáme  $C$ -filtr. [5]

Nastavení  $C$ -filtru je založené spíše na intuici, může být považován za dolní propust, kdy omezuje vysokofrekvenční šum. Nevýhodou tohoto přístupu je pak fakt, že není jednoduché zvolit hodnoty  $C$ -filtru tak, abychom dosáhli požadovaného efektu. Návrh je tedy metodou pokus omyl. Pokud zvolený  $C$ -filtr nesplňuje požadavky, nemusí být hned jasné, jak jej upravit pro vylepšení výsledků. [5]



## **II. PRAKTICKÁ ČÁST**

### 3 VÝPOČET PREDIKCÍ

Důležitým krokem prediktivního řízení je výpočet potřebných predikcí. V této práci je využit rekurzivní výpočet na základě CARIMA modelu. Počet predikcí, které je nutno vypočítat přímo je dán řádem systému, další predikce pak lze již počítat rekurzivně.

#### 3.1 SISO systém bez filtrace, C=1

Vycházíme z modelu druhého řádu

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (51)$$

A CARIMA modelu

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta} n(k) \quad (52)$$

Kde C je barvicí polynom, n je neměřitelná porucha a  $\Delta = 1 - z^{-1}$ .

Polynom C bude v tomto případě  $C=I$ .

Pak můžeme rovnici bez poruchové veličiny přepsat jako

$$(1 - z^{-1})A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k) \quad (53)$$

$$(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})y(k) = (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})\Delta u(k) \quad (54)$$

$$y(k) = (1 - a_1)y(k - 1) + (a_1 - a_2)y(k - 2) + a_2 y(k - 3) + b_1 \Delta u(k - 1) + b_2 \Delta u(k - 2) \quad (55)$$

Pak predikce pro tři kroky jsou

$$\hat{y}(k + 1) = (1 - a_1)y(k) + (a_1 - a_2)y(k - 1) + a_2 y(k - 2) + b_1 \Delta u(k) + b_2 \Delta u(k - 1)$$

$$\hat{y}(k + 2) = (1 - a_1)y(k + 1) + (a_1 - a_2)y(k) + a_2 y(k - 1) + b_1 \Delta u(k + 1) + b_2 \Delta u(k) \quad (56)$$

$$\hat{y}(k + 3) = (1 - a_1)y(k + 2) + (a_1 - a_2)y(k + 1) + a_2 y(k) + b_1 \Delta u(k + 2) + b_2 \Delta u(k + 1)$$

Přepis do maticové podoby

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \hat{y}(k+3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & g_1 \\ g_3 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ &+ \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ y(k-2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \hat{y}(k+3) \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \end{bmatrix} + \mathbf{P} \Delta u(k-1) + \mathbf{Q} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ y(k-2) \end{bmatrix} \quad (58)$$

Tedy

$$\hat{y}(k+j) = \mathbf{G} \Delta u(k+j-1) + \mathbf{P} \Delta u(k-1) + \mathbf{Q} y(k-j+1); j \leq N \quad (59)$$

Kde

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ (1-a_1)b_1 & b_1 \\ (a_1-a_2)b_1 + (1-a_1)^2 b_1 + (1-a_1)b_2 & (1-a_1)b_1 + b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (60)$$

$$\mathbf{P} \Delta u(k-1) = \begin{bmatrix} b_2 \\ (1-a_1)b_2 \\ (1-a_1)^2 b_2 + (a_1-a_2)b_2 \end{bmatrix} \Delta u(k-1) \quad (61)$$

$$\mathbf{Q} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ y(k-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ y(k-2) \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-a_1) \\ (1-a_1)^2 + (a_1-a_2) \\ (1-a_1)^3 + 2(1-a_1)(a_1-a_2) + a_2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1-a_2) \\ (1-a_1)(a_1-a_2) + a_2 \\ (1-a_1)^2(a_1-a_2) + a_2(1-a_1) + (a_1-a_2)^2 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2(1-a_1) \\ a_2(1-a_1)^2 + a_2(a_1-a_2)^2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Koeficienty matic  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$  pro další predikce jsou počítány rekurzivně.

$$p_4 = (1 - a_1)p_3 + (a_1 - a_2)p_2 + a_2p_1 \quad (66)$$

$$q_{41} = (1 - a_1)q_{31} + (a_1 - a_2)q_{21} + a_2q_{11}$$

$$q_{42} = (1 - a_1)q_{32} + (a_1 - a_2)q_{22} + a_2q_{12} \quad (67)$$

$$q_{43} = (1 - a_1)q_{33} + (a_1 - a_2)q_{23} + a_2q_{13}$$

$$g_4 = (1 - a_1)g_3 + (a_1 - a_2)g_2 + a_2g_1 \quad (68)$$

Při rekurzi matice  $\mathbf{G}$  počítáme následující element prvního sloupce a ostatní sloupce posuneme. Platí, že pokud je řídicí horizont menší než maximální horizont, dochází k redukci počtu sloupců.

### 3.2 SISO systém s filtrací, $C \neq 1$

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta} n(k) \quad (69)$$

Můžeme přepsat do podoby

$$\Delta A(z^{-1}) \frac{y(k)}{C(z^{-1})} = B(z^{-1}) \frac{\Delta u(k)}{C(z^{-1})} + n(k) \quad (70)$$

Kde neznámá veličina  $n(k)$  představuje bílý šum a vstupní a výstupní veličiny jsou filtrovány.

Filtrované veličiny tedy jsou

$$y_f(k) = \frac{y(k)}{C(z^{-1})} \quad (71)$$

$$u_f(k) = \frac{u(k)}{C(z^{-1})} \quad (72)$$

Kde je polynom  $C$  ve tvaru

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} \quad (73)$$

Predikční rovnice pro filtrované veličiny

$$\hat{\mathbf{y}}_f(k+j) = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}_f(k+j-1) + \mathbf{P}\Delta\mathbf{u}_f(k-1) + \mathbf{Q}\mathbf{y}_f(k-j+1); j \leq N \quad (74)$$

Vztah mezi filtrovanou a nefiltrovanou hodnotou je pak dán vztahem

$$y_f(k) = \frac{y(k)}{1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2}} \quad (75)$$

$$y(k) = y_f(k) + c_1 y_f(k-1) + c_2 y_f(k-2) \quad (76)$$

Výpočet predikce pro tři kroky

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1) &= y_f(k+1) + c_1 y_f(k) + c_2 y_f(k-1) \\ \hat{y}(k+2) &= y_f(k+2) + c_1 y_f(k+1) + c_2 y_f(k) \\ \hat{y}(k+3) &= y_f(k+3) + c_1 y_f(k+2) + c_2 y_f(k+1) \end{aligned} \quad (77)$$

Přepis do maticové podoby

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \hat{y}(k+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_f(k+1) \\ y_f(k+2) \\ y_f(k+3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_f(k) \\ y_f(k-1) \\ y_f(k-2) \end{bmatrix} \quad (78)$$

Vztah pro filtrované a nefiltrované hodnoty přírůstků akční veličiny jsou vyjádřeny obdobně.

V maticové podobě pak můžeme psát následující rovnice

$$\hat{\mathbf{y}}(k+j) = \mathbf{C}_c \mathbf{y}_f(k+j) + \mathbf{H}_c \mathbf{y}_f(k-j+1) \quad (79)$$

$$\Delta \mathbf{u}_f(k+j) = \mathbf{C}_c \Delta \mathbf{u}(k+j) + \mathbf{H}_c \Delta \mathbf{u}(k-j+1) \quad (80)$$

Kde matice  $\mathbf{C}_c$  a  $\mathbf{H}_c$  mají následující tvar

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Z rovnic (29), (30) pak můžeme vyjádřit filtrované hodnoty

$$\mathbf{y}_f(k+j) = \mathbf{C}_c^{-1} \left( \hat{\mathbf{y}}(k+j) - \mathbf{H}_c \mathbf{y}_f(k-j+1) \right) \quad (83)$$

$$\Delta \mathbf{u}_f(k+j) = \mathbf{C}_c^{-1} \left( \Delta \mathbf{u}(k+j) - \mathbf{H}_c \Delta \mathbf{u}_f(k-j+1) \right) \quad (84)$$

Následnou substitucí rovnic (33), (34) do (24) dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_c^{-1} \left( \hat{\mathbf{y}}(k+j) - \mathbf{H}_c \mathbf{y}_f(k-j+1) \right) &= \\ &= \mathbf{G} \mathbf{C}_c^{-1} \left( \Delta \mathbf{u}(k+j-1) - \mathbf{H}_c \Delta \mathbf{u}_f(k-1) \right) + \mathbf{P} \Delta \mathbf{u}_f(k-1) \\ &+ \mathbf{Q} \mathbf{y}_f(k-j+1) \end{aligned} \quad (85)$$

Nyní si můžeme vyjádřit rovnici prediktoru

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j) = & \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}(k+j-1) + [\mathbf{C}_c\mathbf{P} - \mathbf{G}\mathbf{H}_c]\Delta\mathbf{u}_f(k-1) + [\mathbf{H}_c \\ & + \mathbf{C}_c\mathbf{Q}]\mathbf{y}_f(k-j+1) \end{aligned} \quad (86)$$

Můžeme zavést substituci

$$\tilde{\mathbf{P}} = [\mathbf{C}_c\mathbf{P} - \mathbf{G}\mathbf{H}_c] \quad (87)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = [\mathbf{H}_c + \mathbf{C}_c\mathbf{Q}] \quad (88)$$

Pak dostaneme finální podobu prediktoru

$$\hat{y}(k+j) = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}(k+j-1) + \tilde{\mathbf{P}}\Delta\mathbf{u}_f(k-1) + \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{y}_f(k-j+1) \quad (89)$$

### 3.3 MIMO systém bez filtrace, C=1

Vycházíme z modelu zadaného pomocí maticových zlomků

$$\mathbf{G}(z^{-1}) = \mathbf{A}^{-1}(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1}) \quad (90)$$

$$\mathbf{A}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} & a_3z^{-1} + a_4z^{-2} \\ a_5z^{-1} + a_6z^{-2} & 1 + a_7z^{-1} + a_8z^{-2} \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$\mathbf{B}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} b_1z^{-1} + b_2z^{-2} & b_3z^{-1} + b_4z^{-2} \\ b_5z^{-1} + b_6z^{-2} & b_7z^{-1} + b_8z^{-2} \end{bmatrix} \quad (92)$$

CARIMA model

$$\mathbf{A}(z^{-1})\mathbf{y}(k) = \mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{u}(k) + \frac{\mathbf{C}(z^{-1})}{\Delta}\mathbf{n}(k) \quad (93)$$

Kde

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 - z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 - z^{-1} \end{bmatrix} \quad (94)$$

Tedy

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (1 - z^{-1})(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) & (1 - z^{-1})(a_3z^{-1} + a_4z^{-2}) \\ (1 - z^{-1})(a_5z^{-1} + a_6z^{-2}) & (1 - z^{-1})(1 + a_7z^{-1} + a_8z^{-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} b_1z^{-1} + b_2z^{-2} & b_3z^{-1} + b_4z^{-2} \\ b_5z^{-1} + b_6z^{-2} & b_7z^{-1} + b_8z^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (95)$$

Roznásobením a vyjádřením dostaneme diferenční rovnici CARIMA modelu

$$\begin{aligned}
y_1(k) = & (1 - a_1)y_1(k - 1) + (a_1 - a_2)y_1(k - 2) + a_2y_1(k - 3) \\
& - a_3y_2(k - 1) + (a_3 - a_4)y_2(k - 2) + a_4y_2(k - 3) + b_1\Delta u_1(k - 1) + b_2\Delta u_1(k - 2) + b_3\Delta u_2(k - 1) + b_4\Delta u_2(k - 2)
\end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned}
y_2(k) = & (1 - a_7)y_2(k - 1) + (a_7 - a_8)y_2(k - 2) + a_8y_2(k - 3) \\
& - a_5y_1(k - 1) + (a_5 - a_6)y_1(k - 2) + a_6y_1(k - 3) + b_5\Delta u_1(k - 1) + b_6\Delta u_1(k - 2) + b_7\Delta u_2(k - 1) + b_8\Delta u_2(k - 2)
\end{aligned} \quad (97)$$

Rovnice pro predikce pak můžeme přepsat do maticového tvaru

$$\hat{\mathbf{y}}(k + 1) = \mathbf{A}_1\mathbf{y}(k) + \mathbf{A}_2\mathbf{y}(k - 1) + \mathbf{A}_3\mathbf{y}(k - 2) + \mathbf{B}_1\Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_2\Delta\mathbf{u}(k - 1) \quad (98)$$

Kde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 - a_1 & -a_3 \\ -a_5 & 1 - a_7 \end{bmatrix} \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & a_3 - a_4 \\ a_5 - a_6 & a_7 - a_8 \end{bmatrix} \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_4 \\ a_6 & a_8 \end{bmatrix} \quad (99)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_5 & b_7 \end{bmatrix} \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} b_2 & b_4 \\ b_6 & b_8 \end{bmatrix} \quad (100)$$

Predikce pro tři kroky jsou

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{y}}(k + 1) &= \mathbf{A}_1\mathbf{y}(k) + \mathbf{A}_2\mathbf{y}(k - 1) + \mathbf{A}_3\mathbf{y}(k - 2) + \mathbf{B}_1\Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_2\Delta\mathbf{u}(k - 1) \\
\hat{\mathbf{y}}(k + 2) &= \mathbf{A}_1\mathbf{y}(k + 1) + \mathbf{A}_2\mathbf{y}(k) + \mathbf{A}_3\mathbf{y}(k - 1) + \mathbf{B}_1\Delta\mathbf{u}(k + 1) + \mathbf{B}_2\Delta\mathbf{u}(k) \\
\hat{\mathbf{y}}(k + 3) &= \mathbf{A}_1\mathbf{y}(k + 2) + \mathbf{A}_2\mathbf{y}(k + 1) + \mathbf{A}_3\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_1\Delta\mathbf{u}(k + 2) + \mathbf{B}_2\Delta\mathbf{u}(k + 1)
\end{aligned} \quad (101)$$

Přepis do maticové podoby:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{y}_1(k+1) \\ \hat{y}_2(k+1) \\ \hat{y}_1(k+2) \\ \hat{y}_2(k+2) \\ \hat{y}_1(k+3) \\ \hat{y}_2(k+3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{11} & g_{12} \\ g_{41} & g_{42} & g_{21} & g_{22} \\ g_{51} & g_{52} & g_{31} & g_{32} \\ g_{61} & g_{62} & g_{41} & g_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \\ \Delta u_1(k+1) \\ \Delta u_2(k+1) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{21} \\ p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \\ p_{51} & p_{52} \\ p_{61} & p_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(k-1) \\ \Delta u_2(k-1) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & q_{16} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} & q_{26} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} & q_{36} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & q_{45} & q_{46} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} & q_{56} \\ q_{61} & q_{62} & q_{63} & q_{64} & q_{65} & q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_1(k-1) \\ y_2(k-1) \\ y_1(k-2) \\ y_2(k-2) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \hat{y}(k+3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_3 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k) \\ \Delta \mathbf{u}(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k-1) + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{Q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \mathbf{y}(k-2) \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{G} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k) \\ \Delta \mathbf{u}(k+1) \end{bmatrix} + \mathbf{P} \Delta \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k-1) \\ \mathbf{y}(k-2) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{103}$$

Koeficienty matic  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$  pro další predikce jsou počítány rekurzivně.

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} p_{71} & p_{72} \\ p_{81} & p_{82} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_3 + \mathbf{A}_2 \mathbf{P}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{P}_1 \tag{104}$$

$$\mathbf{Q}_{41} = \begin{bmatrix} q_{71} & q_{72} \\ q_{81} & q_{82} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_{31} + \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{21} + \mathbf{A}_3 \mathbf{Q}_{11} \tag{105}$$

$$\mathbf{Q}_{42} = \begin{bmatrix} q_{73} & q_{74} \\ q_{83} & q_{84} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_{32} + \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{22} + \mathbf{A}_3 \mathbf{Q}_{12} \tag{106}$$

$$\mathbf{Q}_{43} = \begin{bmatrix} q_{75} & q_{76} \\ q_{85} & q_{86} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_{33} + \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{23} + \mathbf{A}_3 \mathbf{Q}_{13} \tag{107}$$

$$\mathbf{G}_{41} = \begin{bmatrix} g_{71} & g_{72} \\ g_{81} & g_{82} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{G}_3 + \mathbf{A}_2 \mathbf{G}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{G}_1 \tag{108}$$

Finální podoba prediktoru:



$$\hat{\mathbf{y}}(k+j) = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}(k+j-1) + \mathbf{P}\Delta\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{Q}y(k-j+1); j \leq N \quad (109)$$

### 3.4 MIMO systém bez filtrace, $C \neq 1$

CARIMA model

$$\Delta\mathbf{A}(z^{-1})\frac{\mathbf{y}(k)}{C(z^{-1})} = \mathbf{B}(z^{-1})\frac{\Delta\mathbf{u}(k)}{C(z^{-1})} + \mathbf{n}(k) \quad (110)$$

Kde neznámá veličina  $\mathbf{n}(k)$  představuje bílý šum a vstupní a výstupní veličiny jsou filtrovány.

Filtrované veličiny tedy jsou

$$\begin{bmatrix} y_{1f}(k) \\ y_{2f}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} \frac{1}{C(z^{-1})} \quad (111)$$

$$\begin{bmatrix} u_{1f}(k) \\ u_{2f}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \frac{1}{C(z^{-1})} \quad (112)$$

Kde je  $C$  ve tvaru

$$C = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} \quad (113)$$

Predikční rovnice pro filtrované hodnoty:

$$\hat{\mathbf{y}}_f(k+j) = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}_f(k+j-1) + \mathbf{P}\Delta\mathbf{u}_f(k-1) + \mathbf{Q}\mathbf{y}_f(k-j+1); j \leq N \quad (114)$$

Vztah mezi filtrovanou a nefiltrovanou veličinou je pak dán vztahem

$$\begin{bmatrix} y_{1f}(k) \\ y_{2f}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} \frac{1}{1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2}} \quad (115)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1f}(k) + c_1y_{1f}(k-1) + c_2y_{1f}(k-2) \\ y_{2f}(k) + c_1y_{2f}(k-1) + c_2y_{2f}(k-2) \end{bmatrix} \quad (116)$$

Výpočet predikce pro tři kroky

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1) = \mathbf{y}_f(k+1) + c_1\mathbf{y}_f(k) + c_2\mathbf{y}_f(k-1)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k+2) = \mathbf{y}_f(k+2) + c_1\mathbf{y}_f(k+1) + c_2\mathbf{y}_f(k) \quad (117)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k+3) = \mathbf{y}_f(k+3) + c_1\mathbf{y}_f(k+2) + c_2\mathbf{y}_f(k+1)$$

Přepis do maticové podoby

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{y}_1(k+1) \\ \hat{y}_2(k+1) \\ \hat{y}_1(k+2) \\ \hat{y}_2(k+2) \\ \hat{y}_1(k+3) \\ \hat{y}_2(k+3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & c_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1f}(k+1) \\ y_{2f}(k+1) \\ y_{1f}(k+2) \\ y_{2f}(k+2) \\ y_{1f}(k+3) \\ y_{2f}(k+3) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1f}(k) \\ y_{2f}(k) \\ y_{1f}(k-1) \\ y_{2f}(k-1) \\ y_{1f}(k-2) \\ y_{2f}(k-2) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{118}$$

Vztahy pro filtrované a nefiltrované hodnoty přírůstků akční veličiny jsou vyjádřeny obdobně.

V maticové podobě pak můžeme psát následující rovnice:

$$\hat{\mathbf{y}}(k+j) = \mathbf{C}_c \mathbf{y}_f(k+j) + \mathbf{H}_c \mathbf{y}_f(k-j+1) \tag{119}$$

$$\Delta \mathbf{u}_f(k+j) = \mathbf{C}_c \Delta \mathbf{u}(k+j) + \mathbf{H}_c \Delta \mathbf{u}_f(k-j+1) \tag{120}$$

Kde matice  $\mathbf{C}_c$  a  $\mathbf{H}_c$  mají následující tvar

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & c_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{121}$$

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{122}$$

Z rovnic pak můžeme vyjádřit filtrované hodnoty

$$\mathbf{y}_f(k+j) = \mathbf{C}_c^{-1} \left( \hat{\mathbf{y}}(k+j) - \mathbf{H}_c \mathbf{y}_f(k-j+1) \right) \tag{123}$$

$$\Delta \mathbf{u}_f(k+j) = \mathbf{C}_c^{-1} \left( \Delta \mathbf{u}(k+j) - \mathbf{H}_c \Delta \mathbf{u}_f(k-j+1) \right) \tag{124}$$

Následnou substitucí rovnic (73), (74) do (64) dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_c^{-1} \left( \hat{\mathbf{y}}(k+j) - \mathbf{H}_c \mathbf{y}_f(k-j+1) \right) &= \\
&= \mathbf{G} \mathbf{C}_c^{-1} \left( \Delta \mathbf{u}(k+j-1) - \mathbf{H}_c \Delta \mathbf{u}_f(k-1) \right) + \mathbf{P} \Delta \mathbf{u}_f(k-1) \\
&+ \mathbf{Q} \mathbf{y}_f(k-j+1)
\end{aligned} \tag{125}$$

Nyní si můžeme vyjádřit rovnici prediktoru

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{y}}(k+j) &= \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}(k+j-1) + [\mathbf{C}_c \mathbf{P} - \mathbf{G} \mathbf{H}_c] \Delta \mathbf{u}_f(k-1) + [\mathbf{H}_c \\
&+ \mathbf{C}_c \mathbf{Q}] \mathbf{y}_f(k-j+1)
\end{aligned} \tag{126}$$

Můžeme zavést substituci

$$\tilde{\mathbf{P}} = [\mathbf{C}_c \mathbf{P} - \mathbf{G} \mathbf{H}_c] \tag{127}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = [\mathbf{H}_c + \mathbf{C}_c \mathbf{Q}] \tag{128}$$

Pak dostaneme finální podobu prediktoru

$$\hat{\mathbf{y}}(k+j) = \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}(k+j-1) + \tilde{\mathbf{P}} \Delta \mathbf{u}_f(k-1) + \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{y}_f(k-j+1) \tag{129}$$

## 4 SIMULAČNÍ OVĚŘOVÁNÍ

V této kapitole jsou uvedeny výsledky simulace řízení vybraných SISO a TITO systémů a je zde vyhodnocena kvalita řízení dle zvolených kritérií. Navržené regulátory byly ověřeny při řízení více systémů druhého řádu s různými vlastnostmi.

Simulační ověřování řízení SISO systémů bylo provedeno na nekmitavých systémech s různými časovými konstantami, kmitavém systému s velkým koeficientem tlumení a kmitavém systému s malým koeficientem tlumení.

Simulační ověřování řízení TITO systémů bylo provedeno na dvou systémech. V prvním případě jsou všechny dílčí přenosové funkce nekmitavé, ve druhém případě jsou pak všechny dílčí přenosové funkce kmitavé.

Při simulacích je řízená veličina ovlivněna šumem s Gaussovým rozdělením s nulovou střední hodnotou.

Řízené systémy jsou realizovány pomocí spojitých přenosových funkcí. Příslušné diskrétní modely byly získány identifikací pomocí metody nejmenších čtverců na základě simulačních identifikačních experimentů kdy byl systém vybuzen náhodným signálem. Perioda vzorkování byla volena tak, aby celý přechodový děj pokrylo 10 až 14 vzorků.

Délky simulací byly upravovány dle periody vzorkování tak, aby měly všechny průběhy simulací stejný počet vzorků, aby byly zachovány stejné podmínky a bylo možno výsledky porovnat.

S každým systémem byly provedeny následující simulační experimenty: simulace bez působení šumu, simulace s působením šumu bez filtrace řízených a akčních veličin a simulace s působením šumu s filtrací řízené i akční veličiny.

Všechny simulace byly provedeny pro stejnou hodnotu penalizačního faktoru  $\lambda$ , aby byly zachovány stejné podmínky a bylo možno výsledky porovnat.

Pro volbu koeficientů filtru neexistuje žádná zavedená metodika, doporučuje se taková volba koeficientů, aby dynamika filtru byla přibližně desetkrát rychlejší než dynamika řízené soustavy. Koeficienty filtrů tedy byly stanoveny experimentálně.

Filtr pro nekmitavé SISO systémy  $G_1$  a  $G_2$

$$C_1 = 1 - 0.15z^{-1} + 0.15z^{-2} \quad (130)$$

Filtr pro nekmitavý SISO systém  $G_3$

$$C_2 = 1 - 0.05z^{-1} + 0.1z^{-2} \quad (131)$$

Filtr pro kmitavý SISO systém  $G_4$

$$C_3 = 1 - 0.01z^{-1} + 0.05z^{-2} \quad (132)$$

Filtr pro kmitavý SISO systém  $G_5$

$$C_4 = 1 - 0.05z^{-1} + 0.01z^{-2} \quad (133)$$

Filtr pro nekmitavý TITO systém  $G_6$

$$C_5 = 1 - 0.3z^{-1} + 0.05z^{-2} \quad (134)$$

Filtr pro kmitavý TITO systém  $G_7$

$$C_6 = 1 - 0.2z^{-1} + 0.1z^{-2} \quad (135)$$

Všechny výsledky simulačního ověřování ve formě hodnot kritérií kvality regulace jsou uvedeny v tabulkách 8 a 9.

Vyhodnocení kvality regulace byly provedeno pomocí sumy kvadrátů přírůstku akční veličiny a sumy kvadrátů regulačních odchylek.

$$S_u = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \sum_{k_1}^{k_2} \Delta u^2(k) \quad (136)$$

$$S_e = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \sum_{k_1}^{k_2} e^2(k) \quad (137)$$

Kde  $\langle k_1, k_2 \rangle$  představuje zvolený interval pro určení kvality regulace a  $\Delta u$  představuje přírůstek akční veličiny a  $e$  představuje regulační odchylku.

## 4.1 Vybrané SISO systémy

Nekmitavý systém  $G_1$ .

$$G_1(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 1} \quad (138)$$

A příslušný diskretní model s periodou vzorkování  $T = 0.5$  s:

$$G_1(z^{-1}) = \frac{0.1805z^{-1} + 0.1292z^{-2}}{1 - 1.213z^{-1} + 0.3679z^{-2}} \quad (139)$$

Nekmitavý systém  $G_2$  s velkými časovými konstantami.

$$G_2(s) = \frac{2}{100s^2 + 50s + 1} \quad (140)$$

A příslušný diskretní model s periodou vzorkování  $T = 10$  s:

$$G_2(z^{-1}) = \frac{0.3036z^{-1} + 0.07001z^{-2}}{1 - 0.82z^{-1} + 0.00681z^{-2}} \quad (141)$$

Nekmitavý systém  $G_3$  s malými časovými konstantami.

$$G_3(s) = \frac{2}{0.03s^2 + 0.4s + 1} \quad (142)$$

A příslušný diskretní model s periodou vzorkování  $T = 0.2$  s

$$G_3(z^{-1}) = \frac{0.5951z^{-1} + 0.2463z^{-2}}{1 - 0.6488z^{-1} + 0.06953z^{-2}} \quad (143)$$

Kmitavý systém  $G_4$  s velkým koeficientem tlumení.

$$G_4(s) = \frac{4}{4s^2 + 1.5s + 1} \quad (144)$$

A příslušný diskretní model s periodou vzorkování  $T = 1.5$  s

$$G_4(z^{-1}) = \frac{0.8991z^{-1} + 0.7427z^{-2}}{1 - 1.159z^{-1} + 0.5698z^{-2}} \quad (145)$$

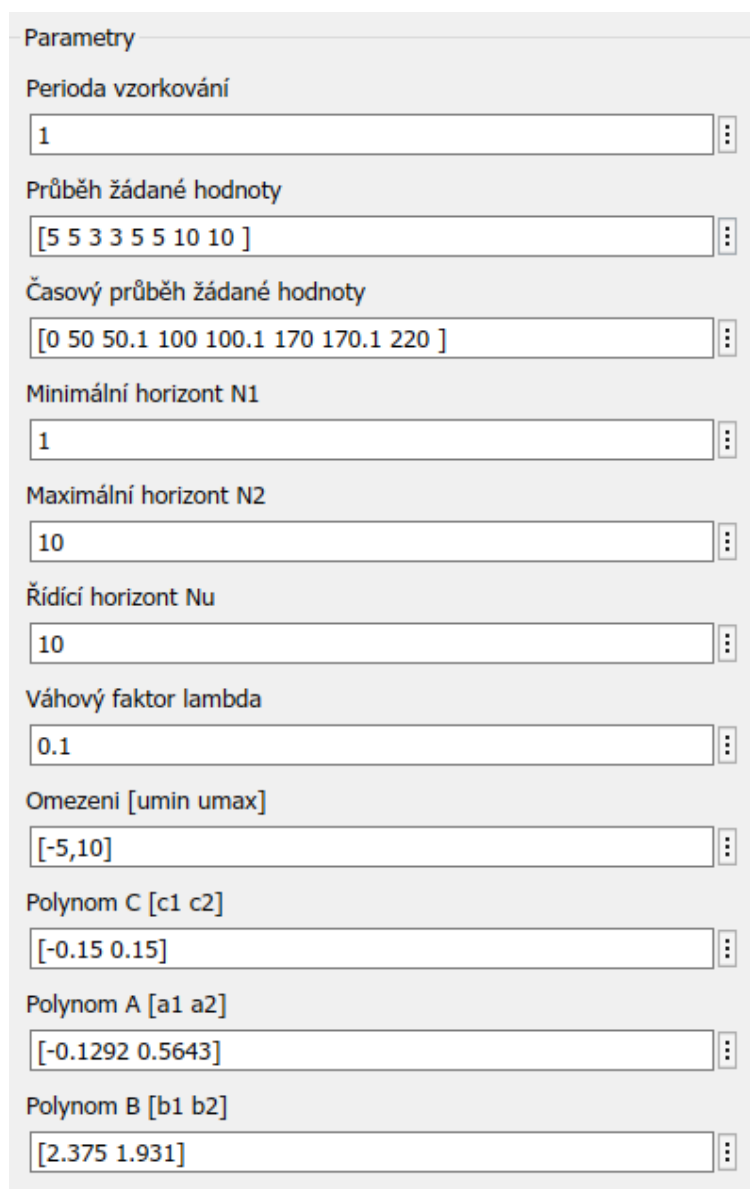
Kmitavý systém  $G_5$  s malým koeficientem tlumení.

$$G_5(s) = \frac{3}{7s^2 + 1s + 1} \quad (146)$$

A příslušný diskretní model s periodou vzorkování  $T = 4$  s

$$G_5(z^{-1}) = \frac{2.375z^{-1} + 1.931z^{-2}}{1 - 0.1292z^{-1} + 0.5643z^{-2}} \quad (147)$$

#### 4.1.1 Realizace v prostředí Matlab-Simulink



Parametry

Perioda vzorkování  
1

Průběh žádané hodnoty  
[5 5 3 3 5 5 10 10]

Časový průběh žádané hodnoty  
[0 50 50.1 100 100.1 170 170.1 220]

Minimální horizont N1  
1

Maximální horizont N2  
10

Řídící horizont Nu  
10

Váhový faktor lambda  
0.1

Omezení [umin umax]  
[-5,10]

Polynom C [c1 c2]  
[-0.15 0.15]

Polynom A [a1 a2]  
[-0.1292 0.5643]

Polynom B [b1 b2]  
[2.375 1.931]

Obrázek 3 Menu pro zadání paramerů SISO regulátoru

Obrázek 3 ukazuje ukázkou zadávacího menu regulátoru.

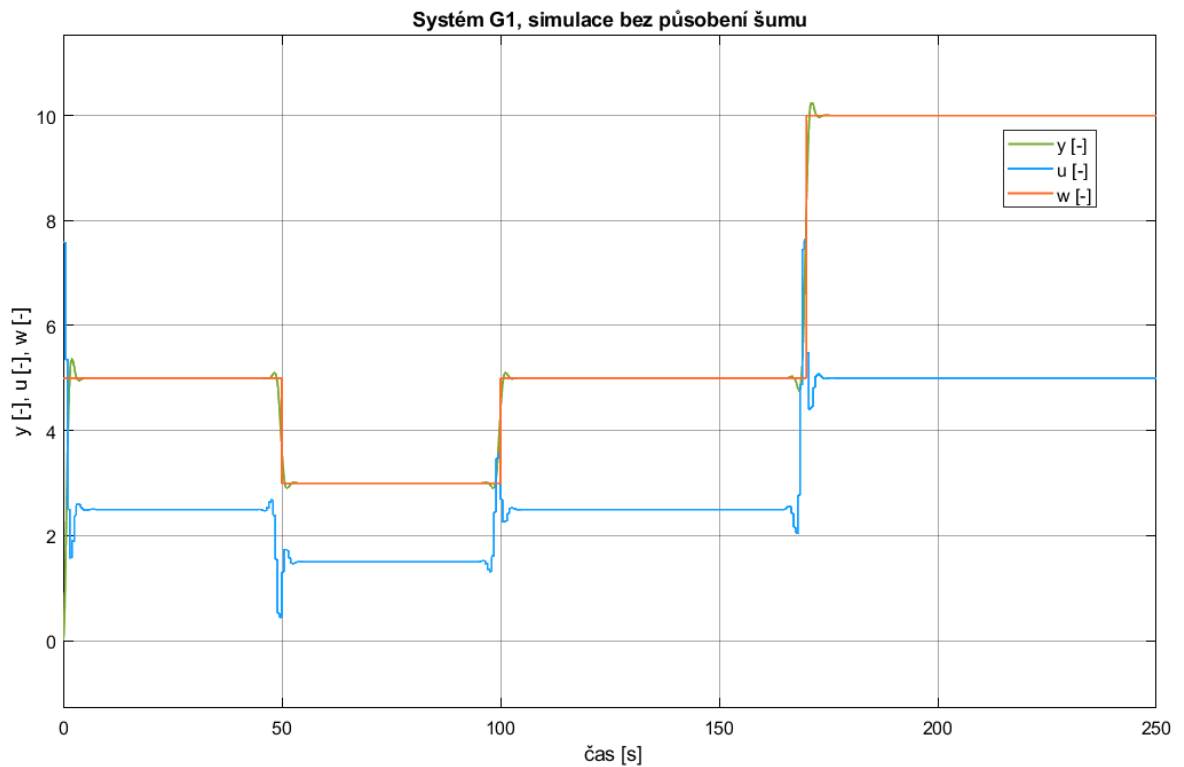
Realizované regulátory v prostředí Simulink jsou přiloženy jako přílohy 2-11.

Regulátory jako S-funkce jsou přiloženy jako přílohy 12,13.



## 4.1.2 Nekmitavý systém $G_I$

### 4.1.2.1 Simulace bez působení šumu

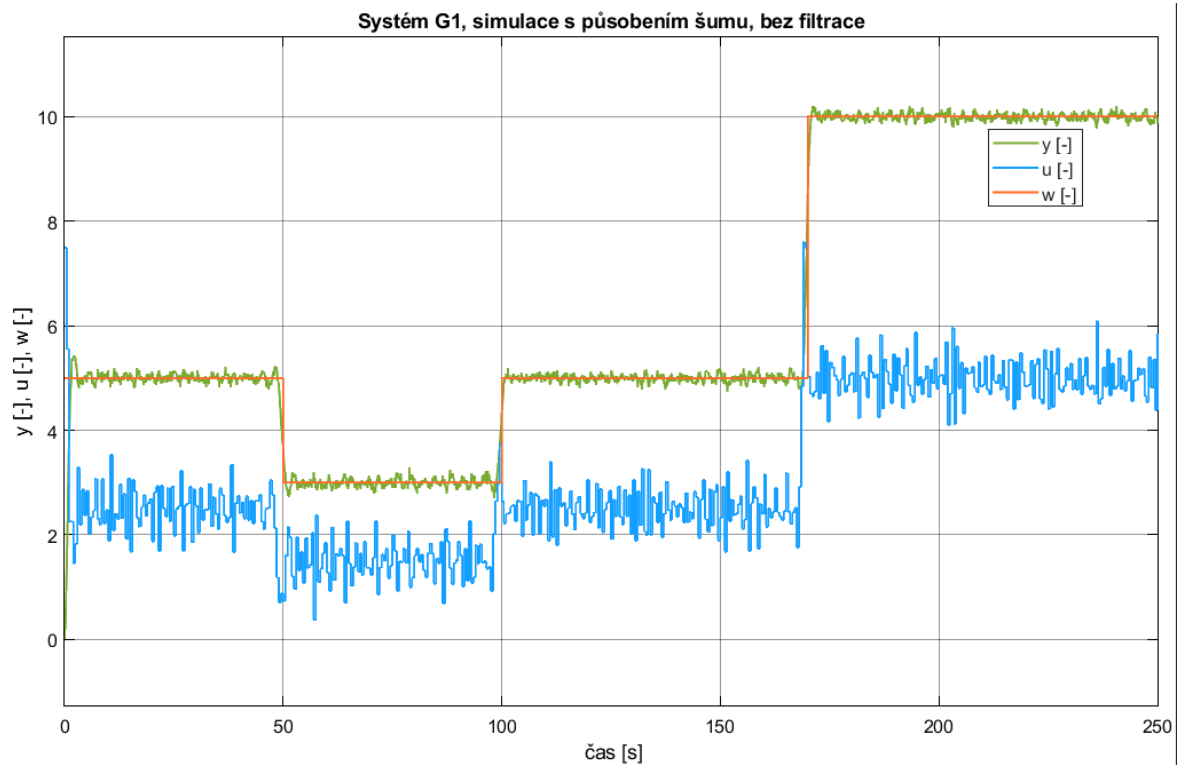


Obrázek 4 Systém G1, simulace bez působení šumu

Na obrázku 4 je zobrazen průběh řízení systému  $G_I$  bez působení šumu.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{11}) = 0.3613 [-]$ ,  $S_e(G_{11}) = 0.1184 [-]$ .

## 4.1.2.2 Simulace s působením šumu, bez filtrace

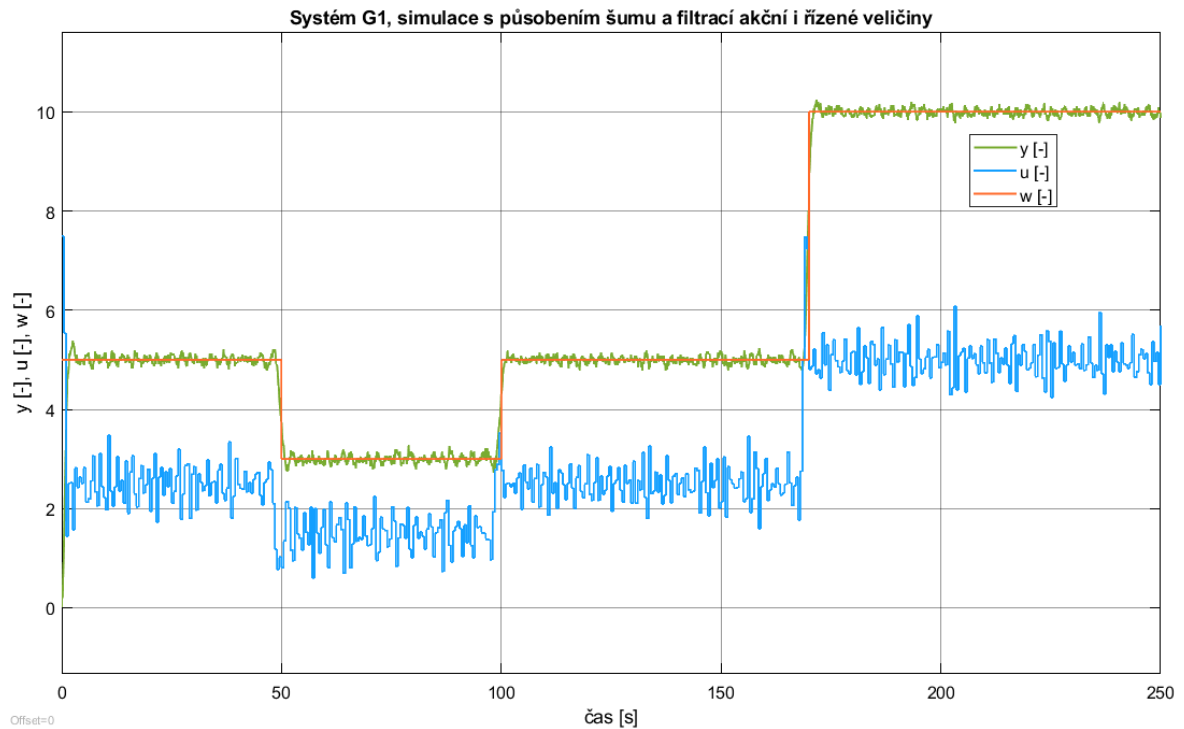


Obrázek 5 Systém G1, simulace s působením šumu, bez filtrace

Na obrázku 5 je zobrazen průběh řízení systému  $G_1$  s působením šumu a bez filtrace akční a řídicí veličiny.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{12}) = 1.745 [-]$ ,  $S_e(G_{12}) = 0.1226 [-]$ .

#### 4.1.2.3 Simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny



Obrázek 6 Systém G1, simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny

Na obrázku 6 je zobrazen průběh řízení systému  $G_1$  s vlivem šumu a filtrací akční i řízené veličiny.

Hodnota kritérií kvality regulace je  $S_u(G_{13}) = 1.4426 [-]$ ,  $S_e(G_{13}) = 0.1202 [-]$ .

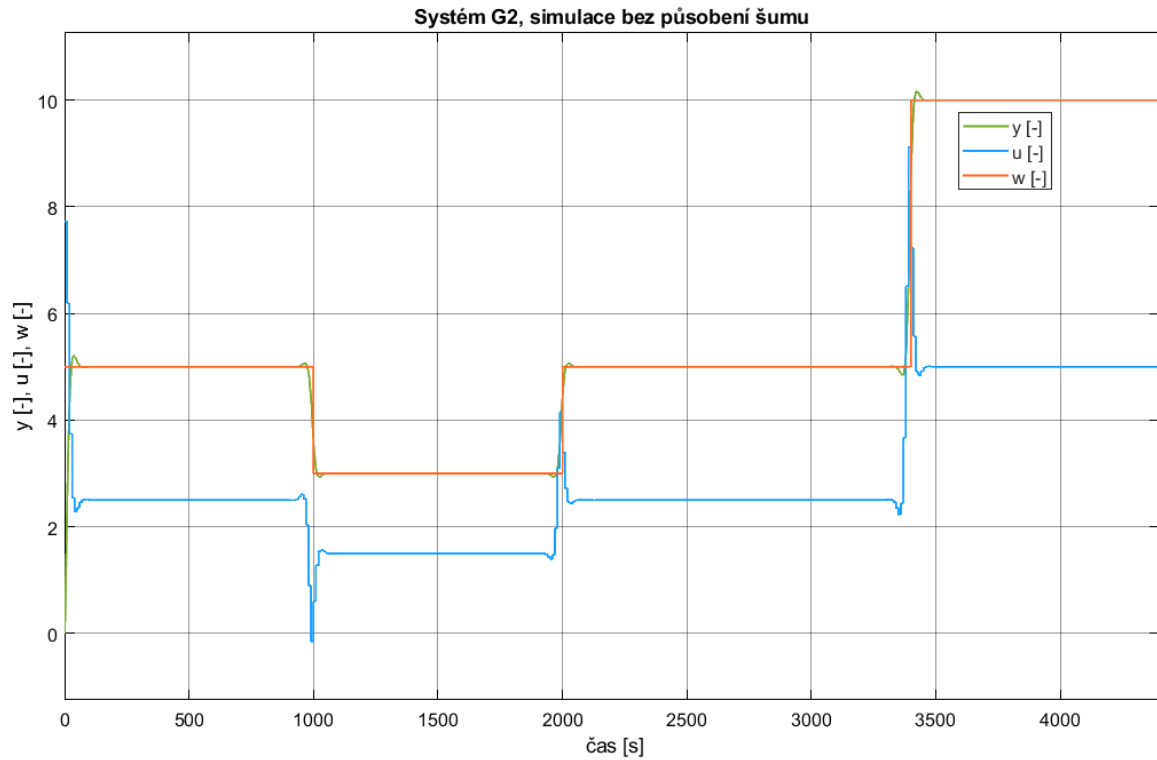
Tabulka 1 Systém G1, hodnoty kritérií kvality regulace

	$S_u [-]$	$S_e [-]$
G1 bez šumu	0.3613	0.1184
G1 s šumem	1.745	0.1226
G1 filtrováno	1.4426	0.1202

V tabulce 1 jsou uvedeny hodnoty kritérií kvality regulace systému  $G_1$ . Je zřejmé, že filtrací dosahujeme výrazného zlepšení kvality regulace z hlediska kritéria akční veličiny, a zároveň dochází k výraznému zlepšení kvality regulace z hlediska kritéria regulační odchylky.

### 4.1.3 Nekmitavý systém $G_2$

#### 4.1.3.1 Simulace bez působení šumu

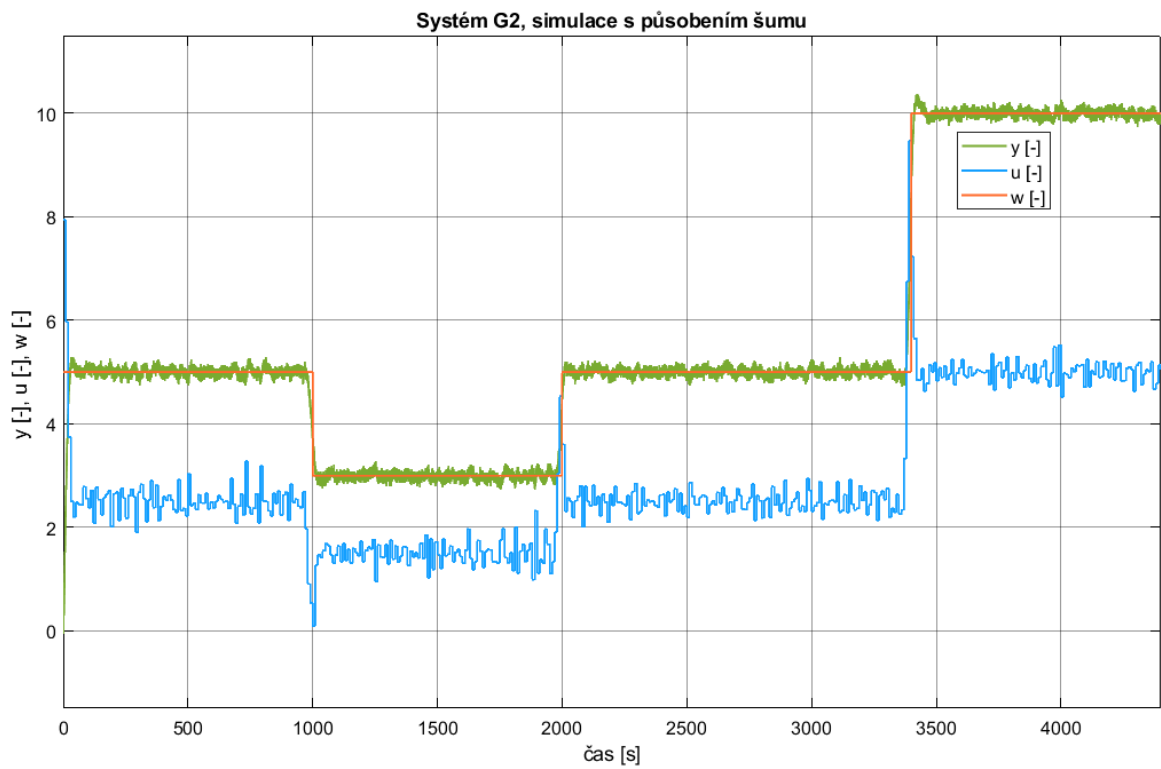


Obrázek 7 Systém  $G_2$ , simulace bez působení šumu

Na obrázku 7 je zobrazen průběh řízení systému  $G_2$  bez působení šumu.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{21}) = 0.4132 [-]$ ,  $S_e(G_{21}) = 0.1176 [-]$ .

## 4.1.3.2 Simulace s působením šumu, bez filtrace

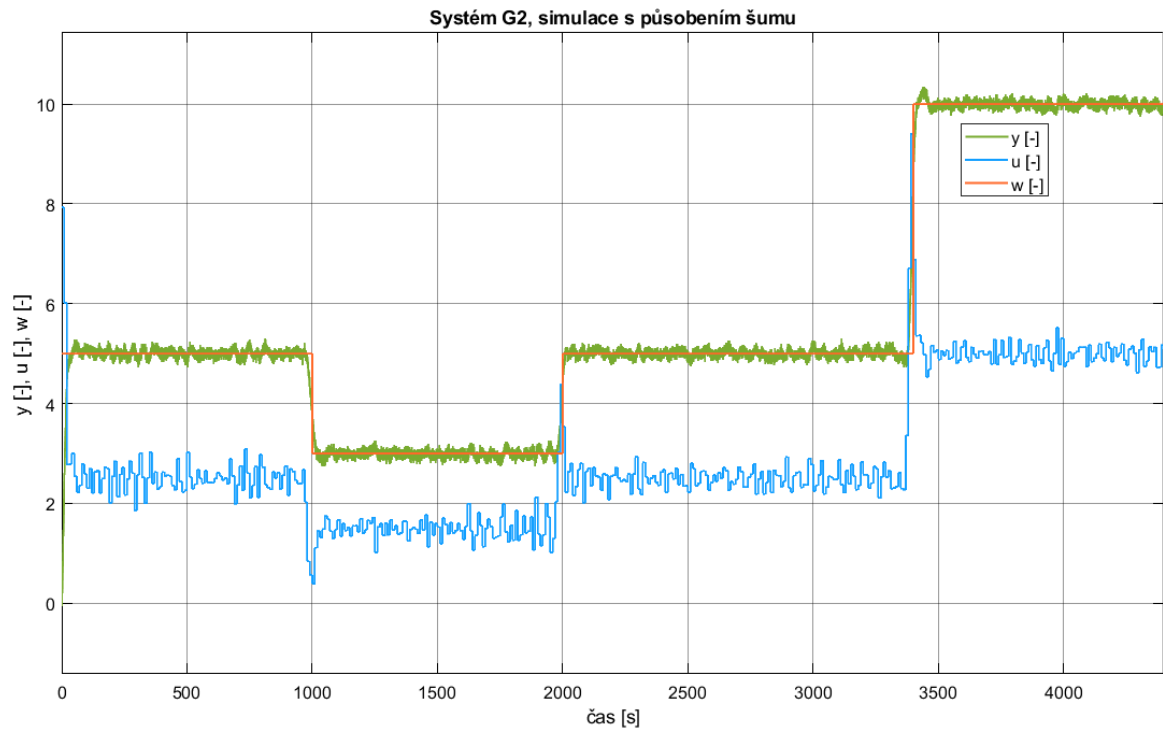


Obrázek 8 Systém G2, simulace s působením šumu

Na obrázku 8 je zobrazen průběh řízení systému  $G_2$  s působením šumu.

Hodnota kritérií kvality regulace je  $S_u(G_{22}) = 0.8659 [-]$ ,  $S_e(G_{22}) = 0.1252 [-]$ .

### 4.1.3.3 Simulace s působením šumu a filtrací akční a řízené veličiny



Obrázek 9 Systém G2, simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny

Na obrázku 9 je zobrazen průběh řízení systému  $G_2$  s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{23}) = 0.8471 [-]$ ,  $S_e(G_{23}) = 0.1230 [-]$ .

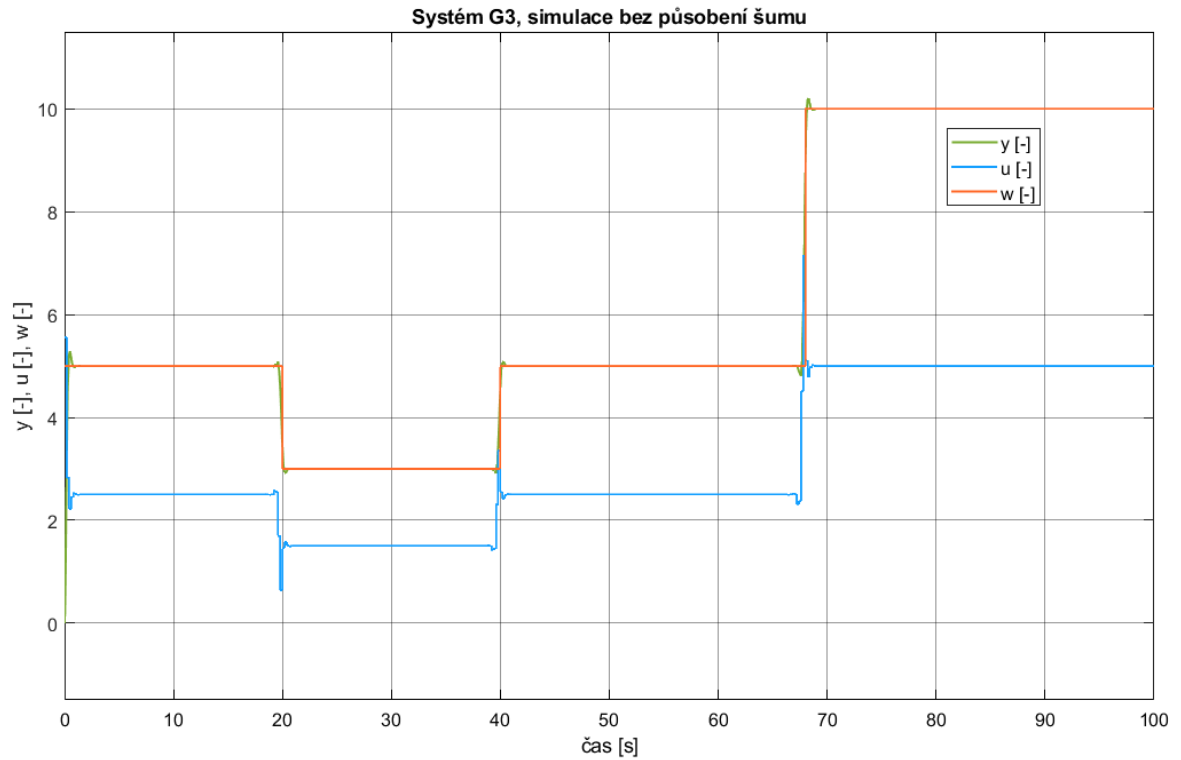
Tabulka 2 Systém G2, hodnoty kritérií kvality regulace

	$S_u [-]$	$S_e [-]$
G2 bez šumu	0.4132	0.1176
G2 s šumem	0.8659	0.1252
G2 filtrováno	0.8471	0.123

V tabulce 2 jsou uvedeny hodnoty kritérií kvality regulace systému  $G_2$ . Je zřejmé, že filtrací dosahujeme zlepšení kvality řízení z hlediska kritéria akční veličiny, a zároveň dochází ke zlepšení kvality regulace z hlediska kritéria regulační odchylky.

#### 4.1.4 Nekmitavý systém $G_3$

##### 4.1.4.1 Simulace bez působení šumu

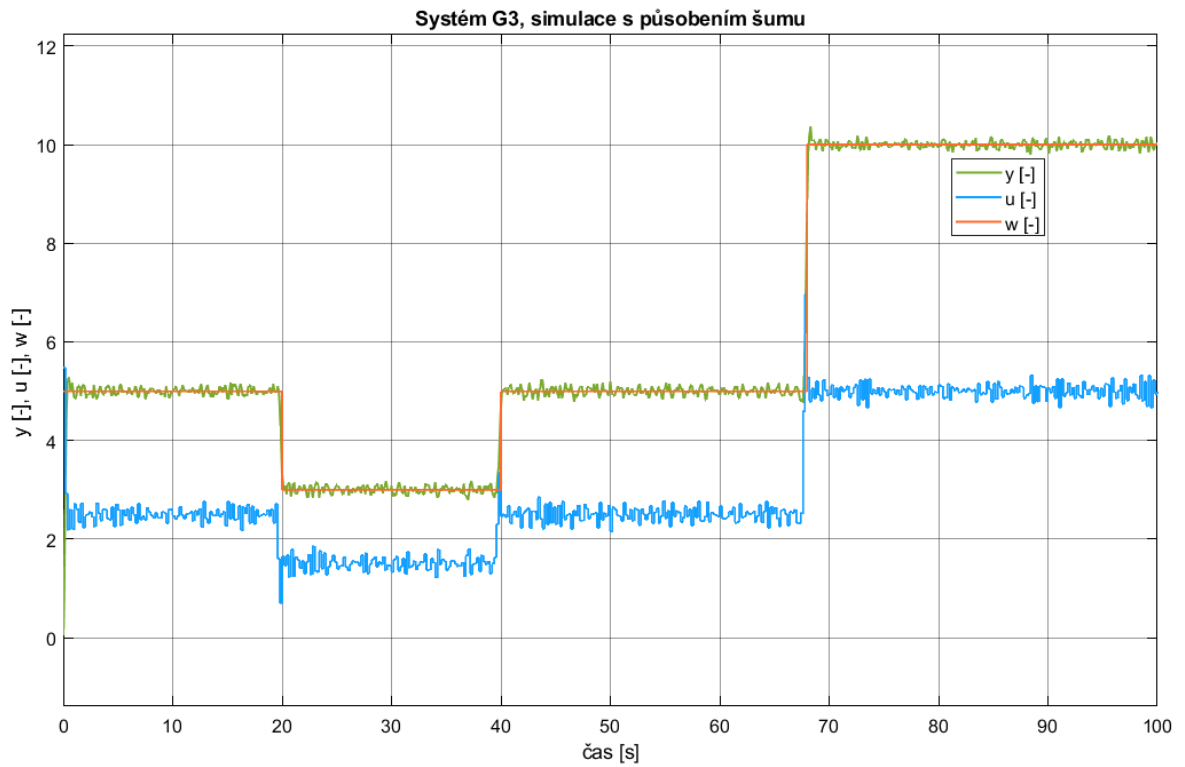


Obrázek 10 Systém  $G_3$ , simulace bez působení šumu

Na obrázku 10 je zobrazen průběh řízení systému  $G_3$  bez působení šumu.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{31}) = 0.2867 [-]$ ,  $S_e(G_{31}) = 0.0999 [-]$ .

## 4.1.4.2 Simulace s působením šumu, bez filtrace



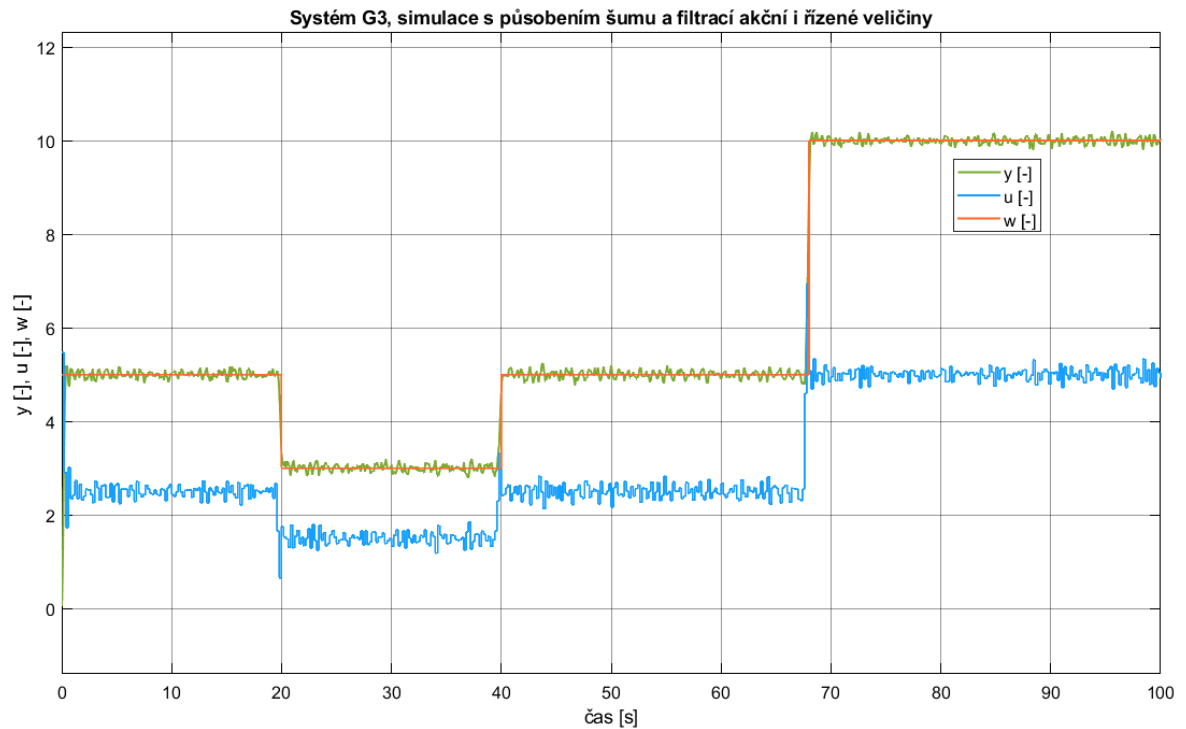
Obrázek 11 Systém G3, simulace s působením šumu

Na obrázku 11 je zobrazen průběh řízení systému  $G_3$  s působením šumu.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{32}) = 0.4722$  [-],  $S_e(G_{32}) = 0.1032$  [-].



#### 4.1.4.3 Simulace s působením šumu a filtrací akční a řízené veličiny



Obrázek 12 Systém G3, simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny

Na obrázku 12 je zobrazen průběh řízení systému  $G_3$  s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{33}) = 0.4574 [-]$ ,  $S_e(G_{33}) = 0.1010 [-]$ .

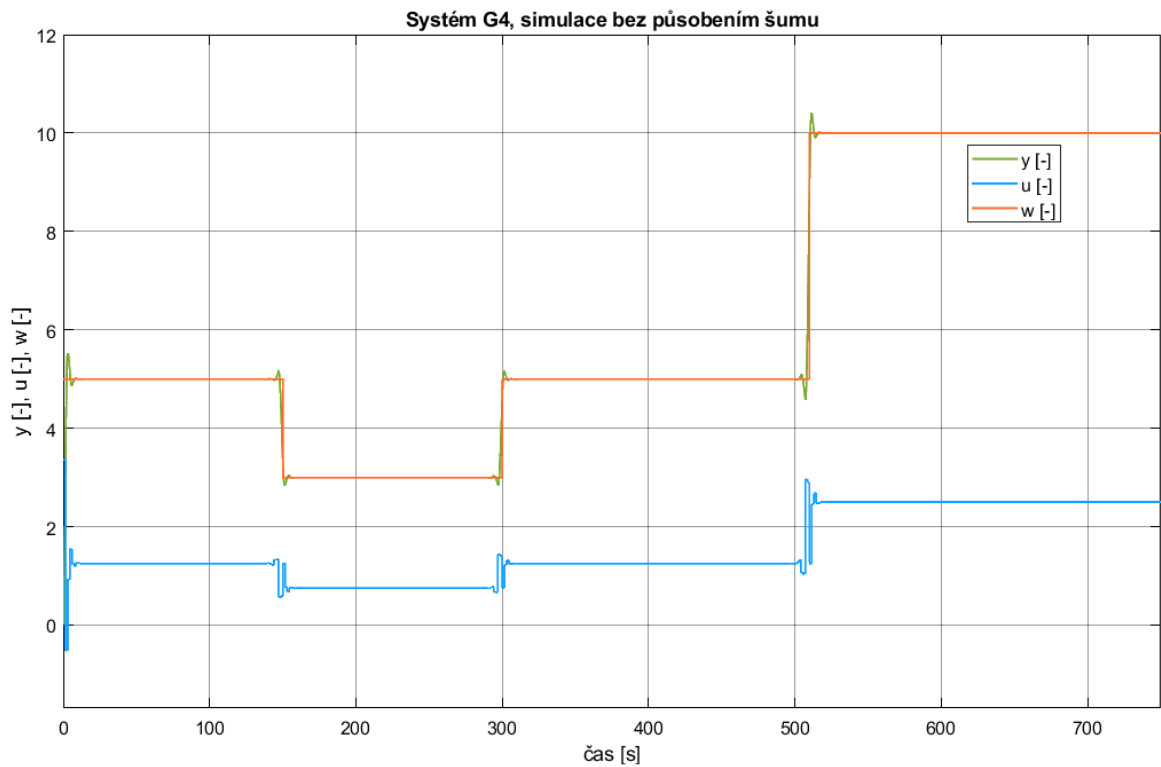
Tabulka 3 Systém G3, hodnoty kritérií kvality regulace

	$S_u [-]$	$S_e [-]$
G3 bez šumu	0.2867	0.0999
G3 s šumem	0.4722	0.1032
G3 filtrováno	0.4574	0.101

V tabulce 3 jsou uvedeny hodnoty kritérií kvality regulace systému  $G_3$ . Je zřejmé, že filtrací dosahujeme zlepšení kvality řízení z hlediska kritéria akční veličiny, a zároveň dochází k zlepšení kvality regulace z hlediska kritéria regulační odchylky.

#### 4.1.5 Kmitavý systém $G_4$

##### 4.1.5.1 Simulace bez působení šumu

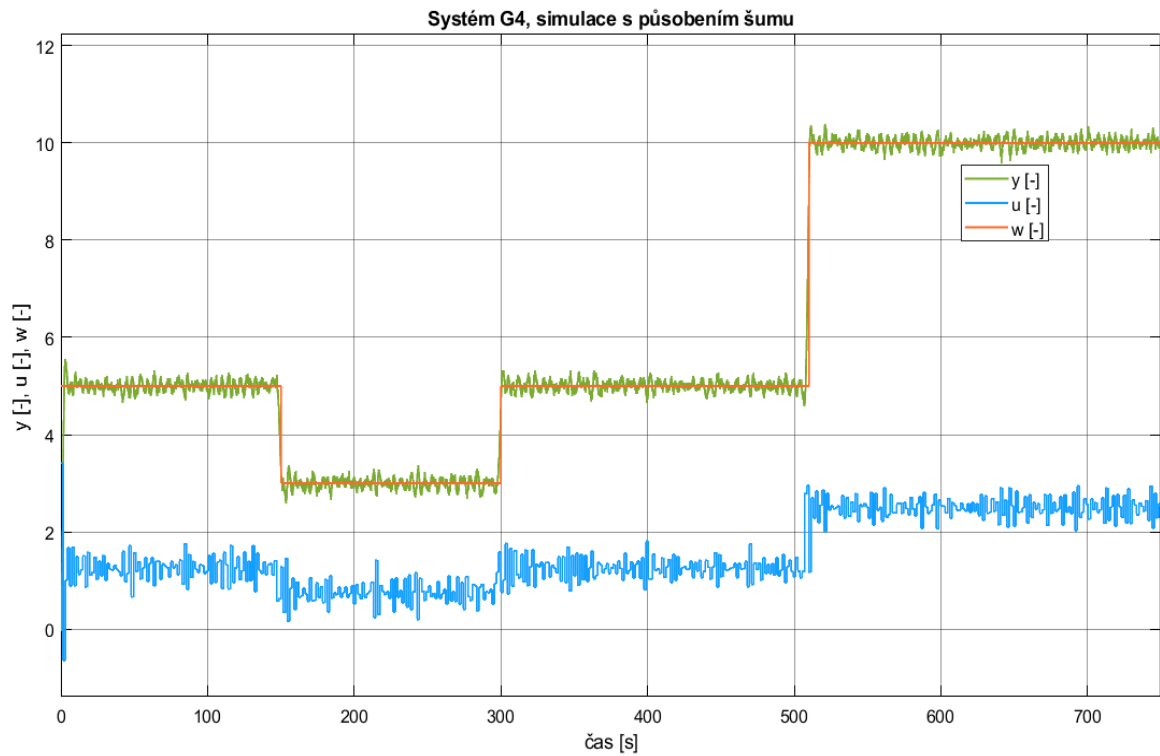


Obrázek 13 Systém  $G_4$ , simulace bez působení šumu

Na obrázku 13 je zobrazen průběh řízení systému  $G_4$  bez působení šumu.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{41}) = 0.2383$  [-],  $S_e(G_{41}) = 0.1049$  [-].

## 4.1.5.2 Simulace s působením šumu, bez filtrace

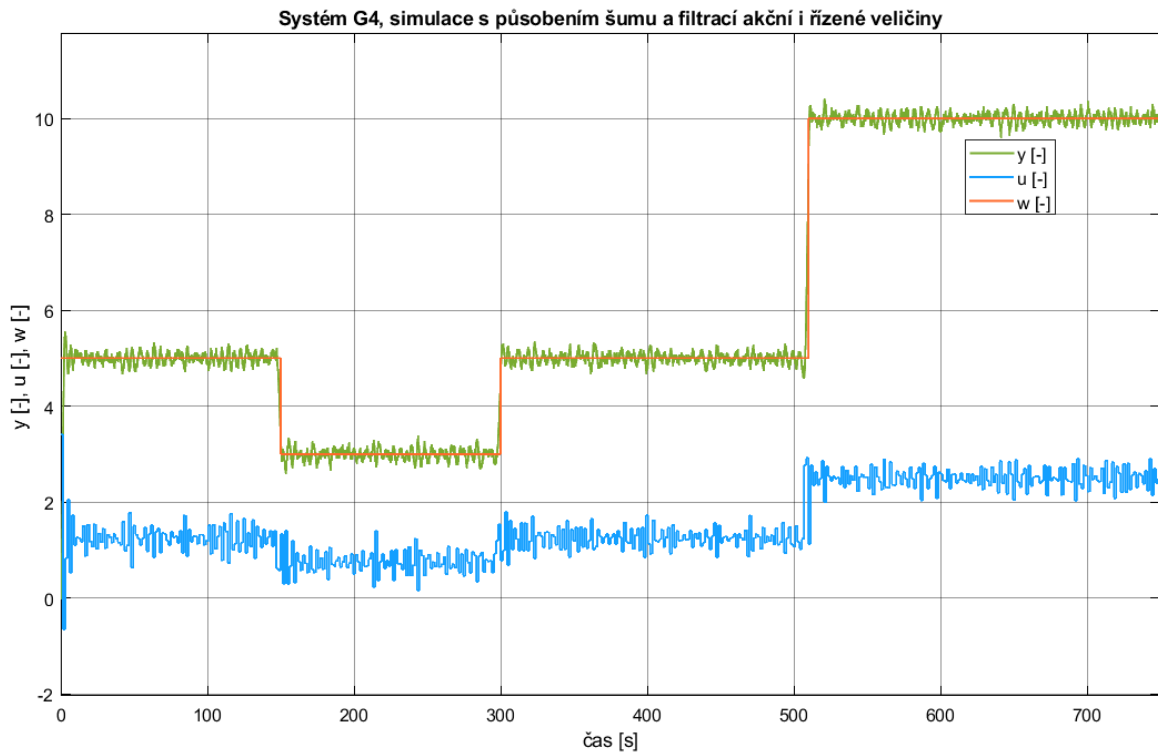


Obrázek 14 Systém G4, simulace s působením šumu

Na obrázku 14 je zobrazen průběh řízení systému  $G_4$  s působením šumu.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{42}) = 0.9066 [-]$ ,  $S_e(G_{42}) = 0.1124 [-]$ .

#### 4.1.5.3 Simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny



Obrázek 15 Systém G4, simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny

Na obrázku 15 je zobrazen průběh řízení systému  $G_4$  s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{43}) = 0.8494 [-]$ ,  $S_e(G_{43}) = 0.1122 [-]$ .

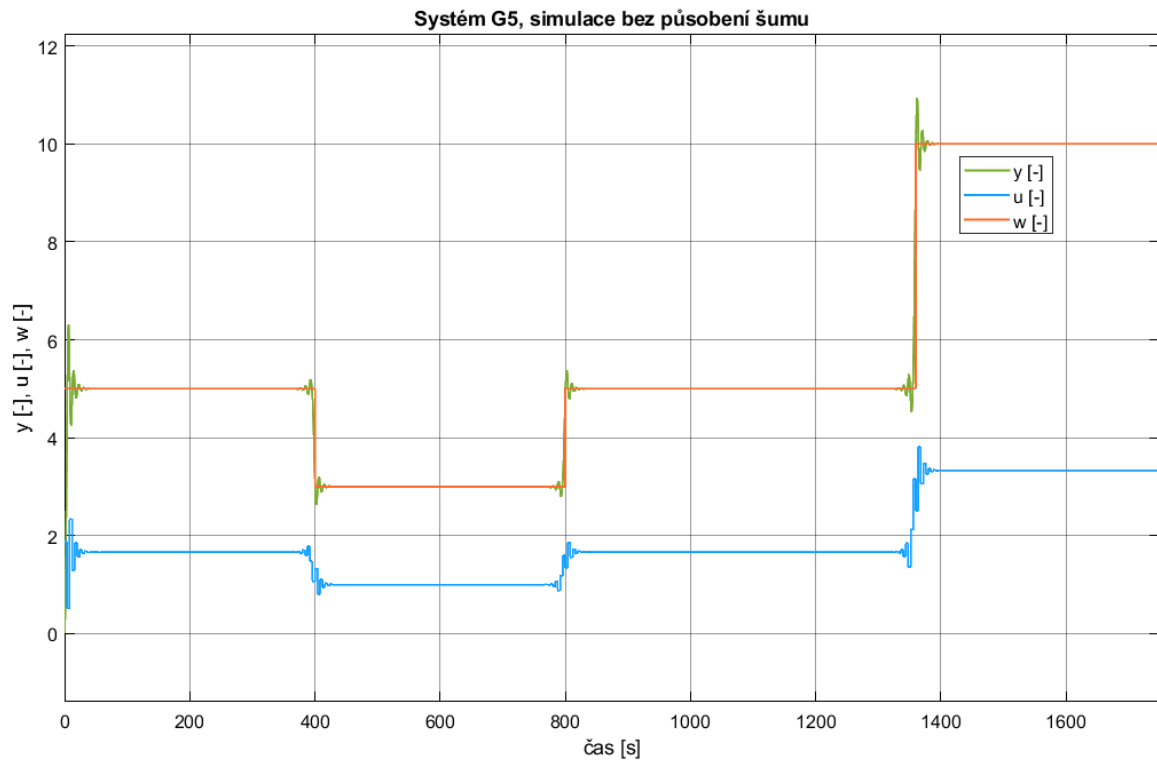
Tabulka 4 Systém G4, hodnoty kritérií kvality regulace

	$S_u [-]$	$S_e [-]$
G4 bez šumu	0.2383	0.1049
G4 s šumem	0.9066	0.1124
G4 filtrováno	0.8494	0.1122

V tabulce 4 jsou uvedeny hodnoty kritérií kvality regulace systému  $G_4$ . Je zřejmé, že filtrací dosahujeme výrazného zlepšení kvality řízení z hlediska kritéria akční veličiny, a zároveň dochází k zlepšení kvality regulace z hlediska kritéria regulační odchylky.

#### 4.1.6 Kmitavý systém $G_5$

##### 4.1.6.1 Simulace bez působení šumu

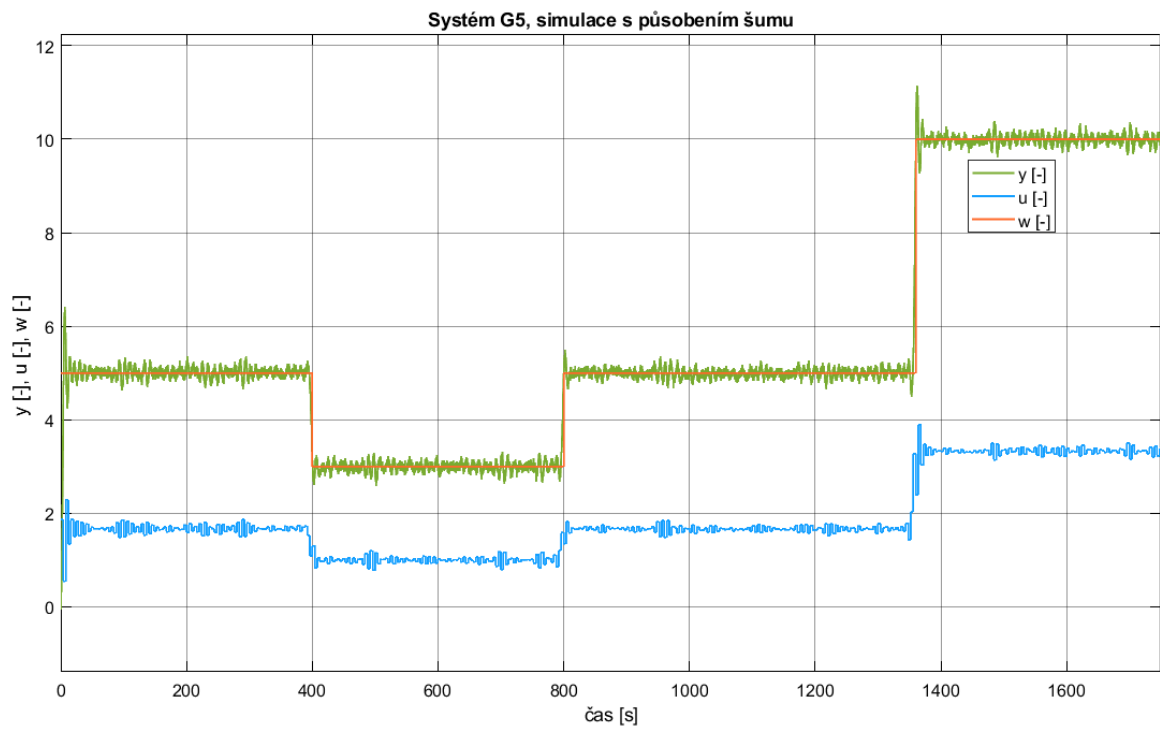


Obrázek 16 Systém  $G_5$ , simulace bez působení šumu

Na obrázku 16 je zobrazen průběh řízení systému  $G_5$  bez působení šumu.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{51}) = 0.1277 [-]$ ,  $S_e(G_{51}) = 0.1243 [-]$ .

## 4.1.6.2 Simulace s působením šumu

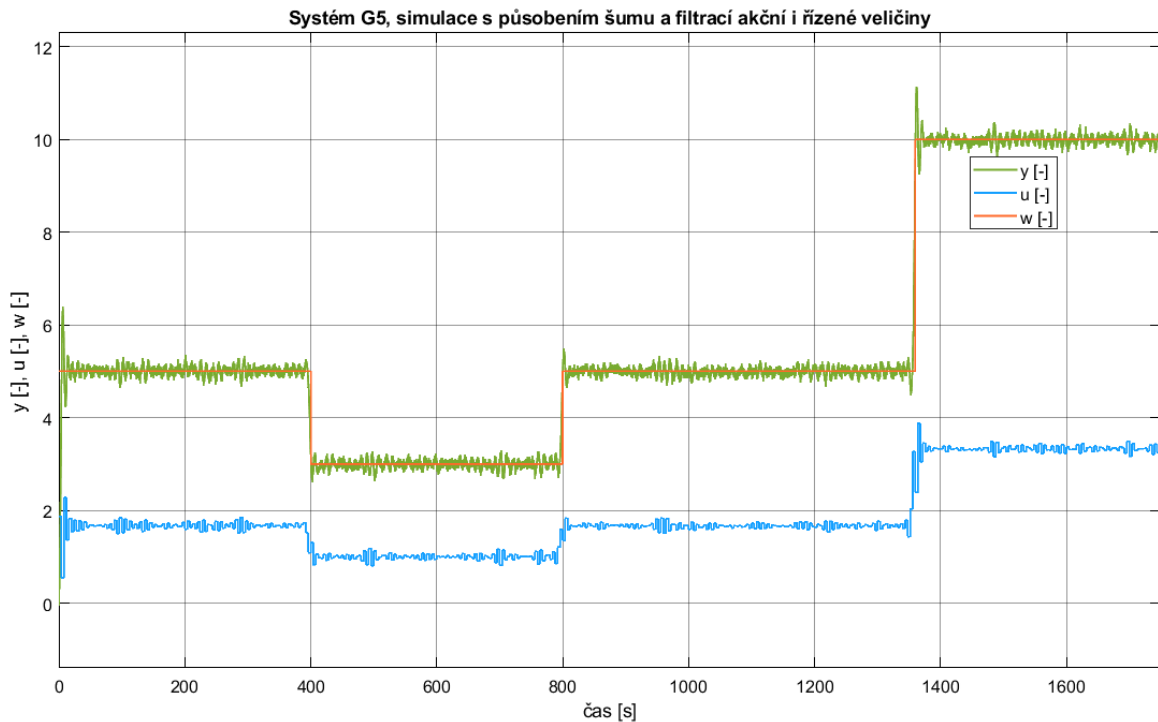


Obrázek 17 Systém G5, simulace s působením šumu

Na obrázku 17 je zobrazen průběh řízení systému  $G_5$  s působením šumu.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{52}) = 0.2058 [-]$ ,  $S_e(G_{52}) = 0.1329 [-]$ .

#### 4.1.6.3 Simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny



Obrázek 18 Systém G5, simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny

Na obrázku 18 je zobrazen průběh řízení systému  $G_5$  s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_u(G_{53}) = 0.1797[-]$ ,  $S_e(G_{53}) = 0.1334[-]$ .

Tabulka 5 Systém G5, hodnoty kritérií kvality regulace

	$S_u [-]$	$S_e [-]$
G5 bez šumu	0.1277	0.1243
G5 s šumem	0.2058	0.1329
G5 filtrováno	0.1797	0.1334

V tabulce 5 jsou uvedeny hodnoty kritérií kvality regulace systému  $G_5$ . Je zřejmé, že filtrací dosahujeme výrazného zlepšení kvality řízení z hlediska kritéria akční veličiny, ale zároveň dochází k zhoršení kvality regulace z hlediska kritéria regulační odchylky.

## 4.2 Vybrané TITO systémy

Nekmitavý systém  $G_6$ .

$$G_6(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{2s^2 + 6s + 1} & \frac{2}{s^2 + 3s + 1} \\ \frac{3}{2s^2 + 5s + 1} & \frac{5}{3s^2 + 7s + 1} \end{bmatrix} \quad (148)$$

A příslušný diskretní model s periodou vzorkování  $T = 1$  s, vyjádřen pomocí maticových zlomků:

$$G_6(z^{-1}) = A^{-1}(z^{-1})B(z^{-1}) \quad (149)$$

$$A(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 - 1.3694z^{-1} + 0.4623z^{-2} & 0.4784z^{-1} - 0.4092z^{-2} \\ 0.1959z^{-1} - 0.1392z^{-2} & 1 - 1.1114z^{-1} + 0.2203z^{-2} \end{bmatrix} \quad (150)$$

$$B(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.4412z^{-1} + 0.1369z^{-2} & 0.4268z^{-1} + 0.1043z^{-2} \\ 0.3667z^{-1} + 0.1741z^{-2} & 0.4277z^{-1} + 0.2246z^{-2} \end{bmatrix} \quad (151)$$

Kmitavý systém  $G_7$ .

$$G_7(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{2s^2 + 0.2s + 1} & \frac{5}{s^2 + 0.2s + 1} \\ \frac{4}{2s^2 + 0.3s + 1} & \frac{5}{3s^2 + 0.4s + 1} \end{bmatrix} \quad (152)$$

A příslušný diskretní model s periodou vzorkování  $T = 3$  s, vyjádřen pomocí maticových zlomků:

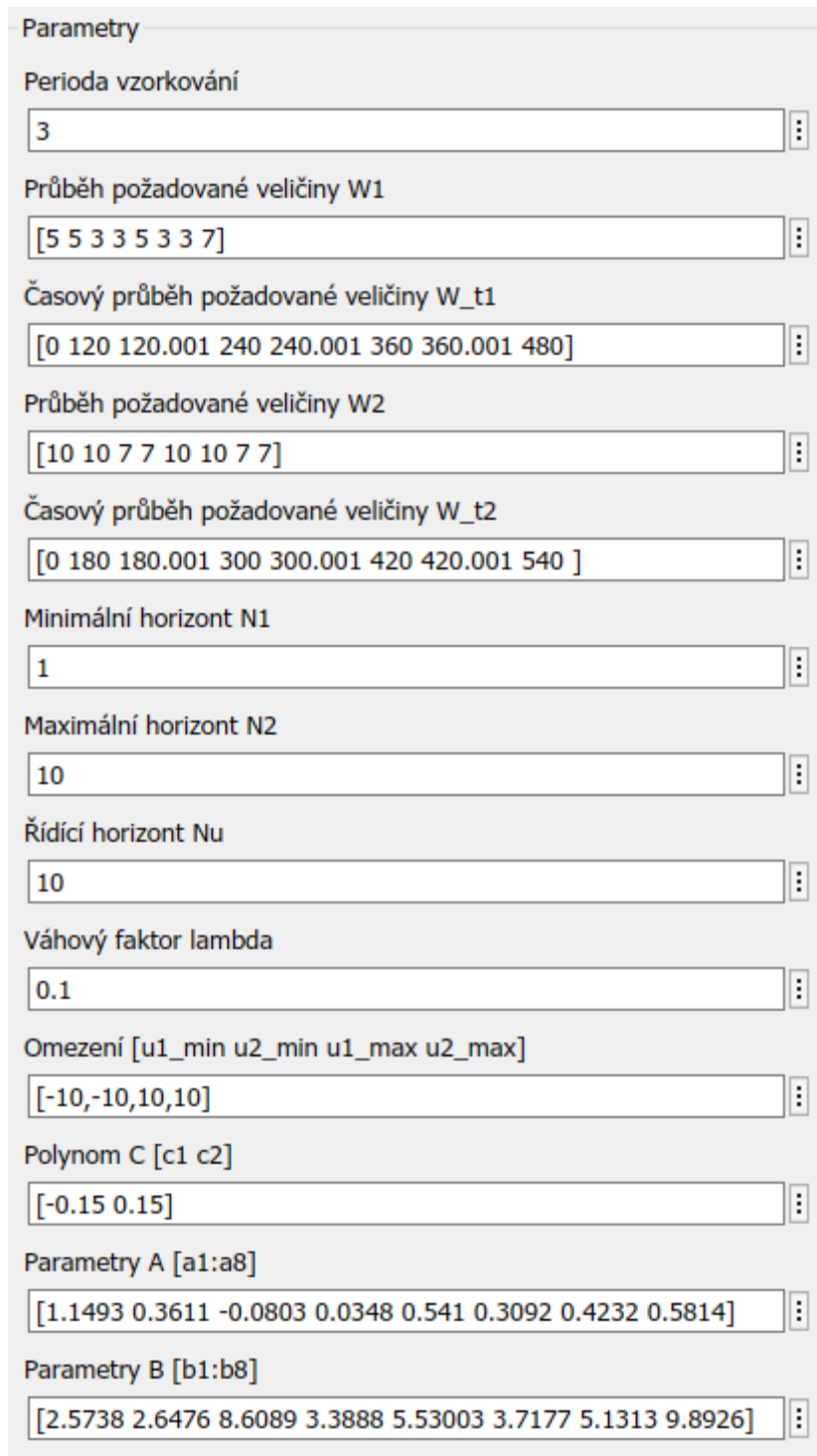
$$G_7(z^{-1}) = A^{-1}(z^{-1})B(z^{-1}) \quad (153)$$

$$A(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 + 1.1493z^{-1} + 0.3611z^{-2} & -0.0803z^{-1} + 0.0348z^{-2} \\ 0.541z^{-1} + 0.3092z^{-2} & 1 + 0.4232z^{-1} + 0.5814z^{-2} \end{bmatrix} \quad (154)$$

$$B(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 2.5738z^{-1} + 2.6476z^{-2} & 8.6089z^{-1} + 3.3888z^{-2} \\ 5.53003z^{-1} + 3.7177z^{-2} & 5.1313z^{-1} + 9.8926z^{-2} \end{bmatrix} \quad (155)$$



#### 4.2.1 Realizace v prostředí Matlab-Simulink



Parametry

Perioda vzorkování  
3

Průběh požadované veličiny W1  
[5 5 3 3 5 3 3 7]

Časový průběh požadované veličiny W\_t1  
[0 120 120.001 240 240.001 360 360.001 480]

Průběh požadované veličiny W2  
[10 10 7 7 10 10 7 7]

Časový průběh požadované veličiny W\_t2  
[0 180 180.001 300 300.001 420 420.001 540 ]

Minimální horizont N1  
1

Maximální horizont N2  
10

Řídící horizont Nu  
10

Váhový faktor lambda  
0.1

Omezení [u1\_min u2\_min u1\_max u2\_max]  
[-10,-10,10,10]

Polynom C [c1 c2]  
[-0.15 0.15]

Parametry A [a1:a8]  
[1.1493 0.3611 -0.0803 0.0348 0.541 0.3092 0.4232 0.5814]

Parametry B [b1:b8]  
[2.5738 2.6476 8.6089 3.3888 5.53003 3.7177 5.1313 9.8926]

Obrázek 19 Menu pro zadání parametrů TITO regulátoru

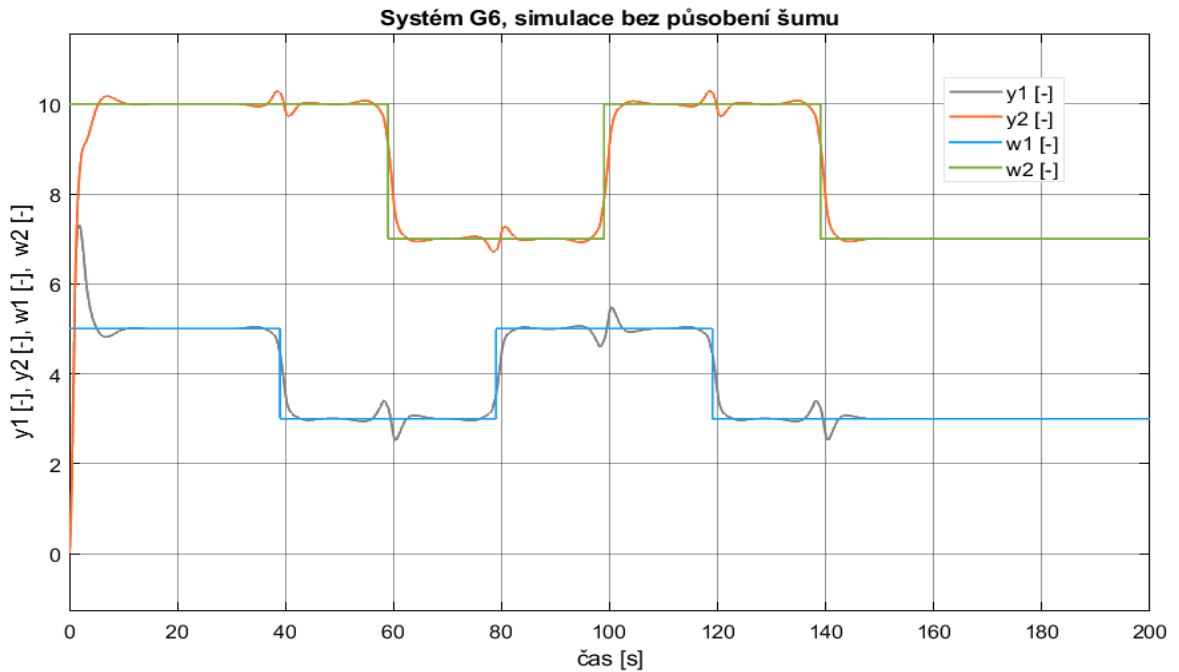
Obrázek 19 ukazuje ukázkou zadávacího menu regulátoru.

Realizované regulátory v prostředí Simulink jsou přiloženy jako přílohy 14-17.

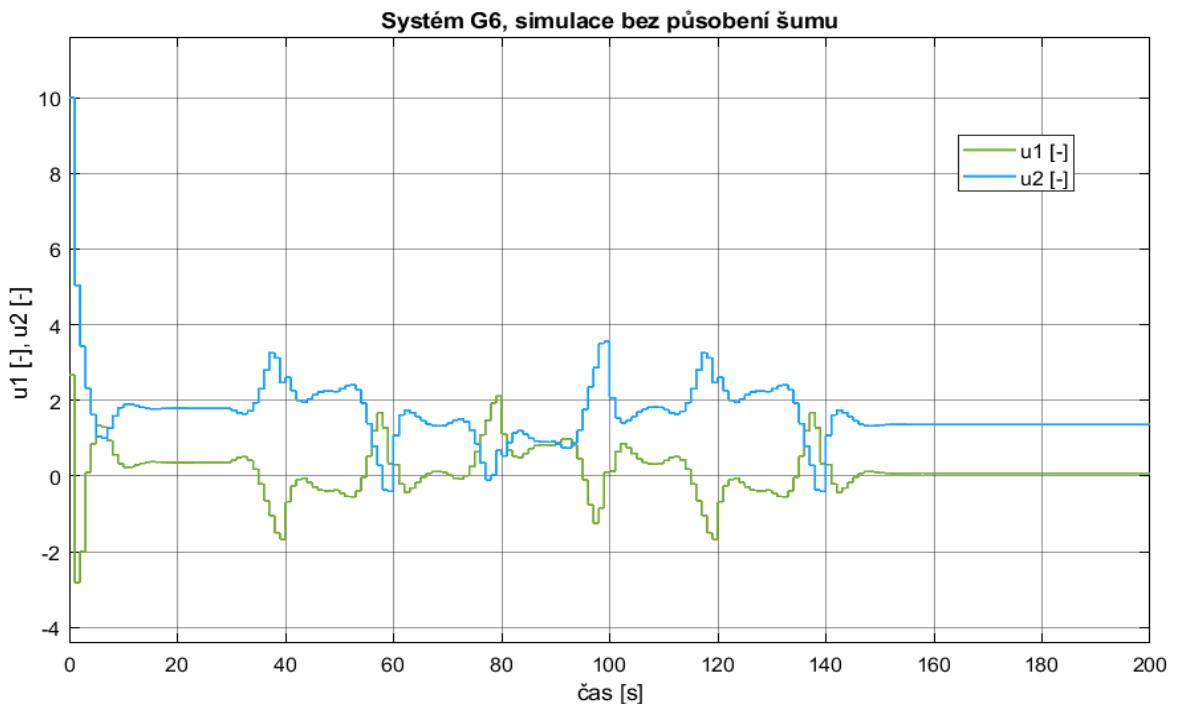
Regulátory jako S-funkce jsou přiloženy jako přílohy 18,19.

## 4.2.2 Nekmitavý systém $G_6$

### 4.2.2.1 Simulace bez působení šumu



Obrázek 20 Systém  $G_6$ , simulace požadované a řízené veličiny, bez působení šumu

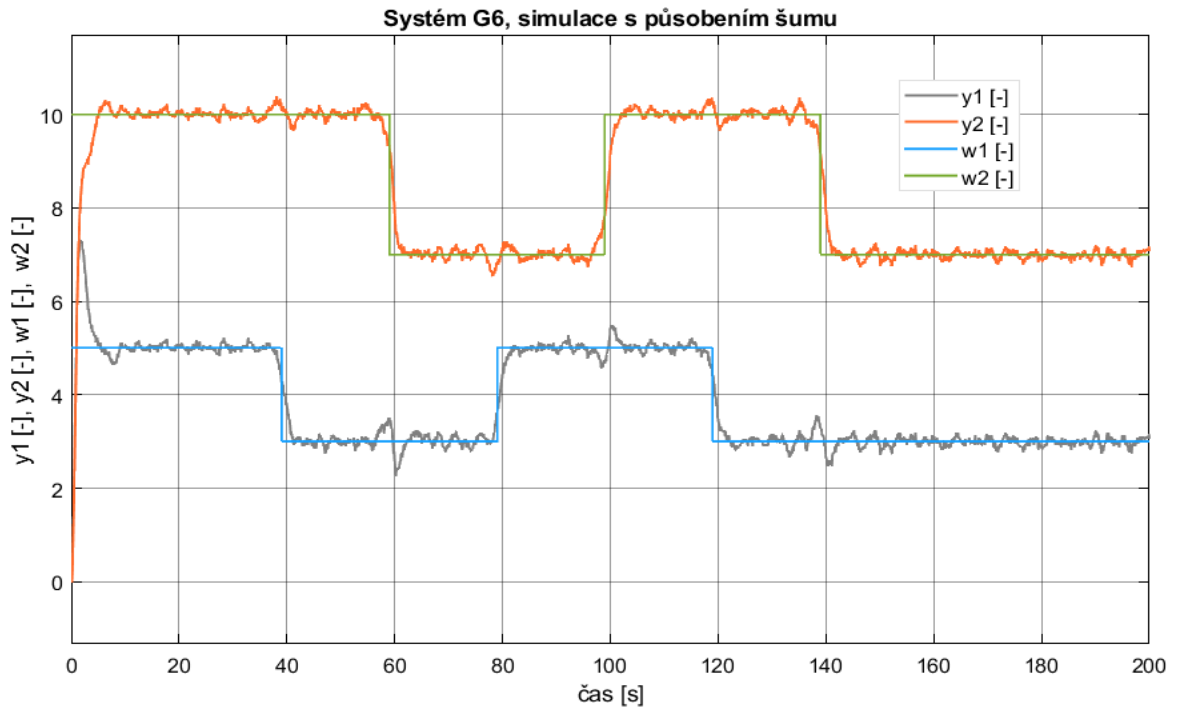


Obrázek 21 Systém  $G_6$ , simulace akční veličiny, bez působení šumu

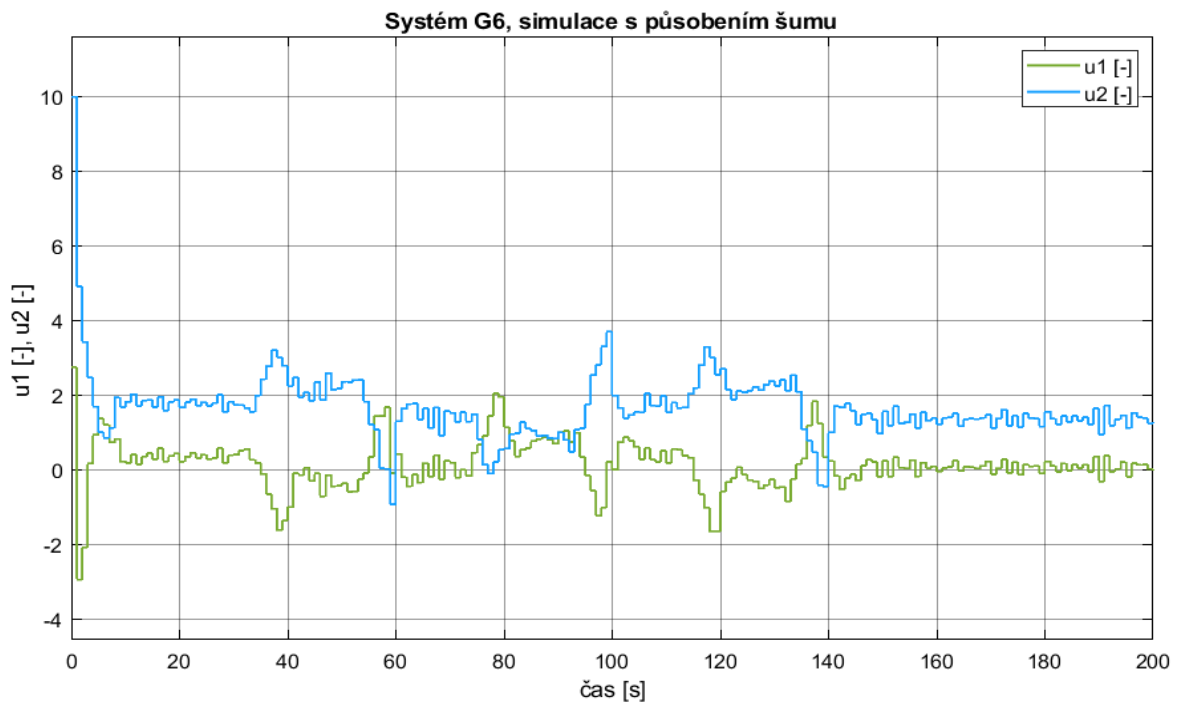
Na obrázcích 20 a 21 je zobrazen průběh řízení systému  $G_6$  bez působení šumu.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_{u1}(G_{61}) = 0.6512 [-]$ ,  $S_{u2}(G_{61}) = 1.7541 [-]$ .  
 $S_{e1}(G_{61}) = 0.1764 [-]$ ,  $S_{e2}(G_{61}) = 0.6537 [-]$ .

## 4.2.2.2 Simulace s působením šumu



Obrázek 22 Systém G6, simulace požadované a řízené veličiny, s působením šumu

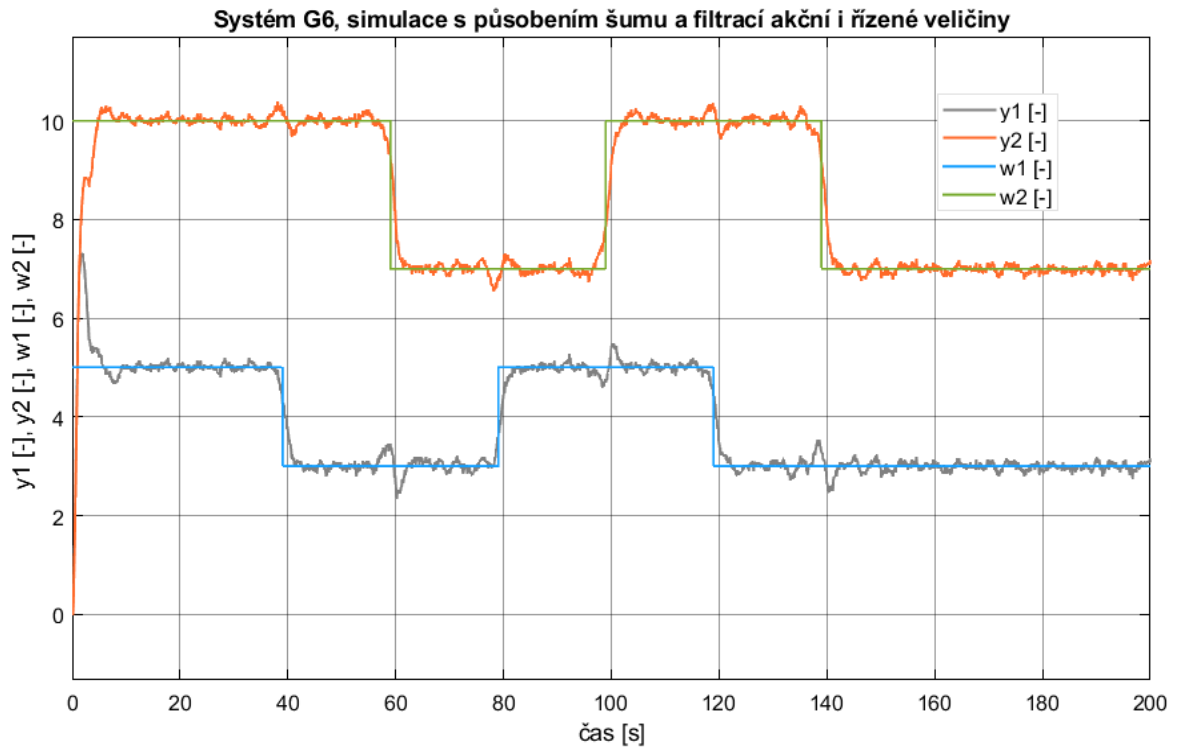


Obrázek 23 Systém G6, simulace akční veličiny, s působením šumu

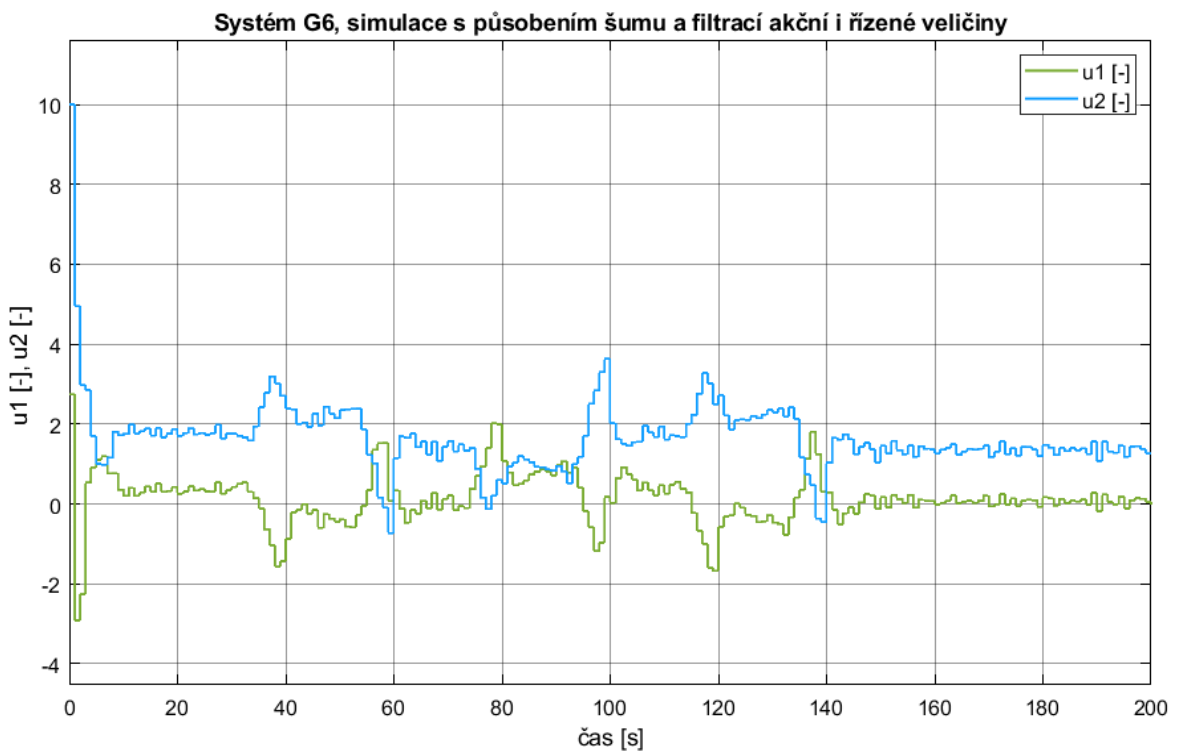
Na obrázcích 22 a 23 je zobrazen průběh řízení systému  $G_6$  s působením šumu.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_{u1}(G_{62}) = 0.9443$  [-],  $S_{u2}(G_{62}) = 2.0795$  [-].  
 $S_{e1}(G_{62}) = 0.1878$  [-],  $S_{e2}(G_{62}) = 0.6589$  [-].

#### 4.2.2.3 Simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny



Obrázek 24 Systém G6, simulace požadované a řízené veličiny, s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny



Obrázek 25 Systém G6, simulace akční veličiny s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny

Na obrázcích 25 a 26 je zobrazen průběh řízení systému  $G_6$  s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_{u1}(G_{63}) = 0.8362 [-]$ ,  $S_{u2}(G_{63}) = 1.9105 [-]$ .  
 $S_{e1}(G_{63}) = 0.1755 [-]$ ,  $S_{e2}(G_{63}) = 0.7576 [-]$ .

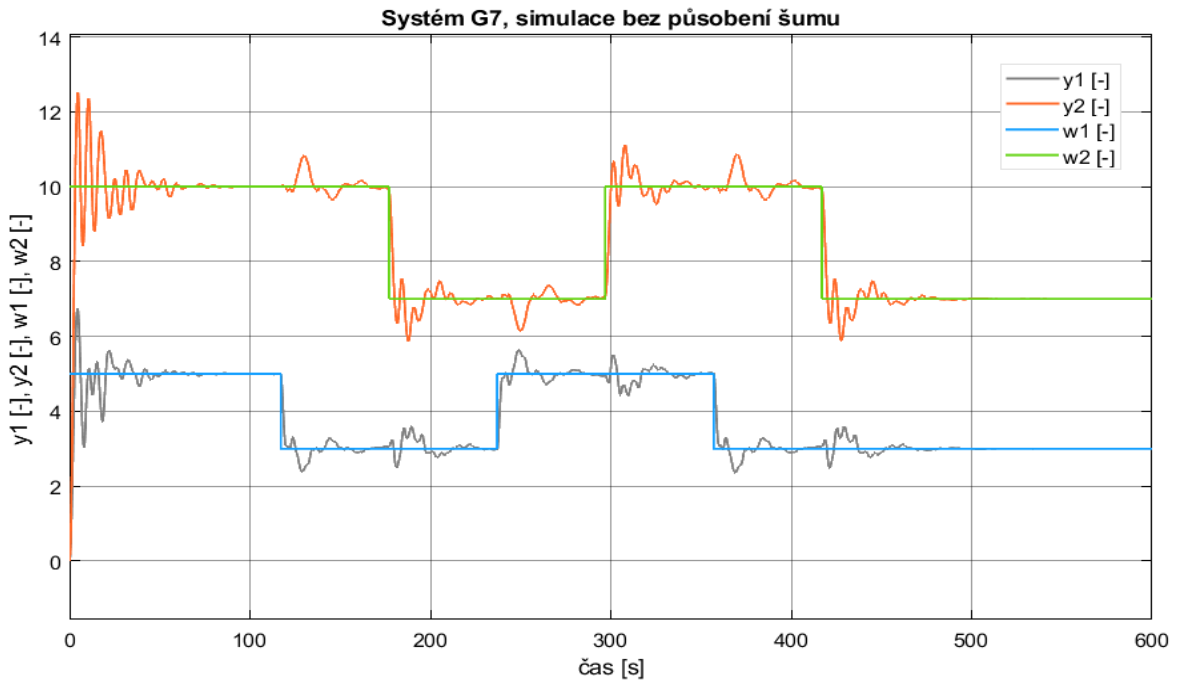
Tabulka 6 Systém G6, hodnoty kritérií kvality regulace

	Su1 [-]	Su2 [-]	Se1 [-]	Se2 [-]
G6 bez šumu	0.6512	1.7541	0.1764	0.6537
G6 s šumem	0.9443	0.1878	2.0795	0.6589
G6 filtrováno	0.8362	0.1755	1.9105	0.7576

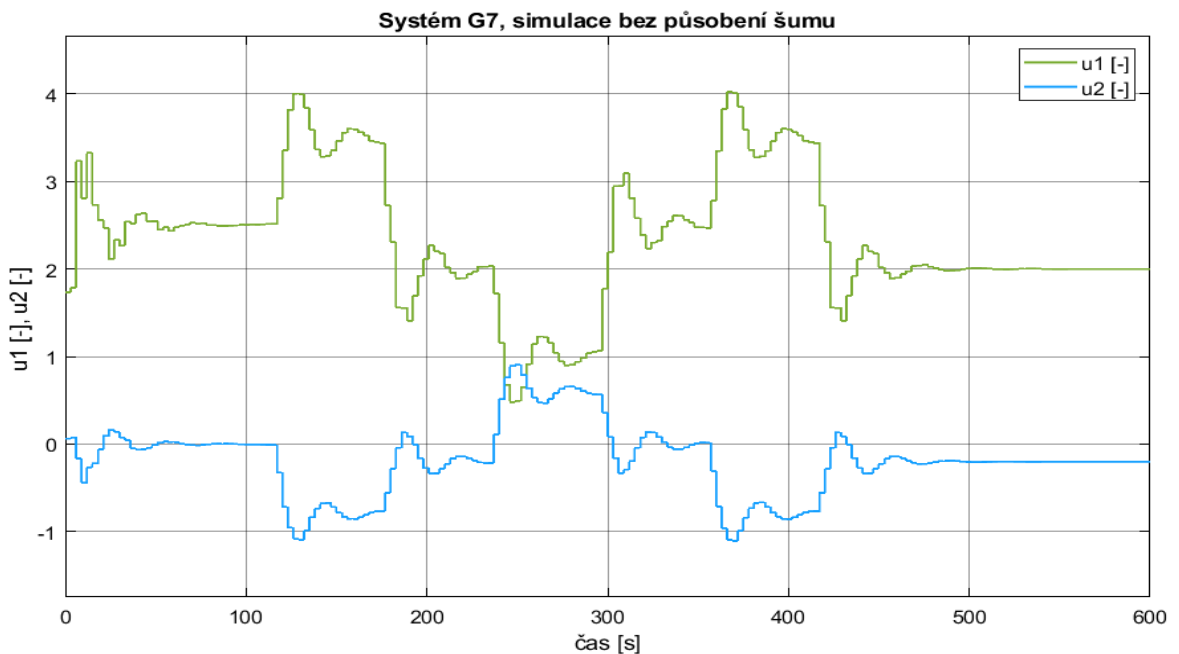
V tabulce 6 jsou uvedeny hodnoty kritérií kvality regulace systému  $G_6$ . Je zřejmé, že filtrací dosahujeme zlepšení kvality řízení z hlediska kritérií akční veličiny. Zároveň také dochází ke zlepšení kvality z hlediska kritéria regulační odchylky  $Se_1$ , to vše je však na úkor zhoršení kritéria regulační odchylky  $Se_2$ .

### 4.2.3 Kmitavý systém $G_7$

#### 4.2.3.1 Simulace bez působení šumu



Obrázek 26 Systém  $G_7$ , simulace požadované a řízené veličiny, bez působení šumu

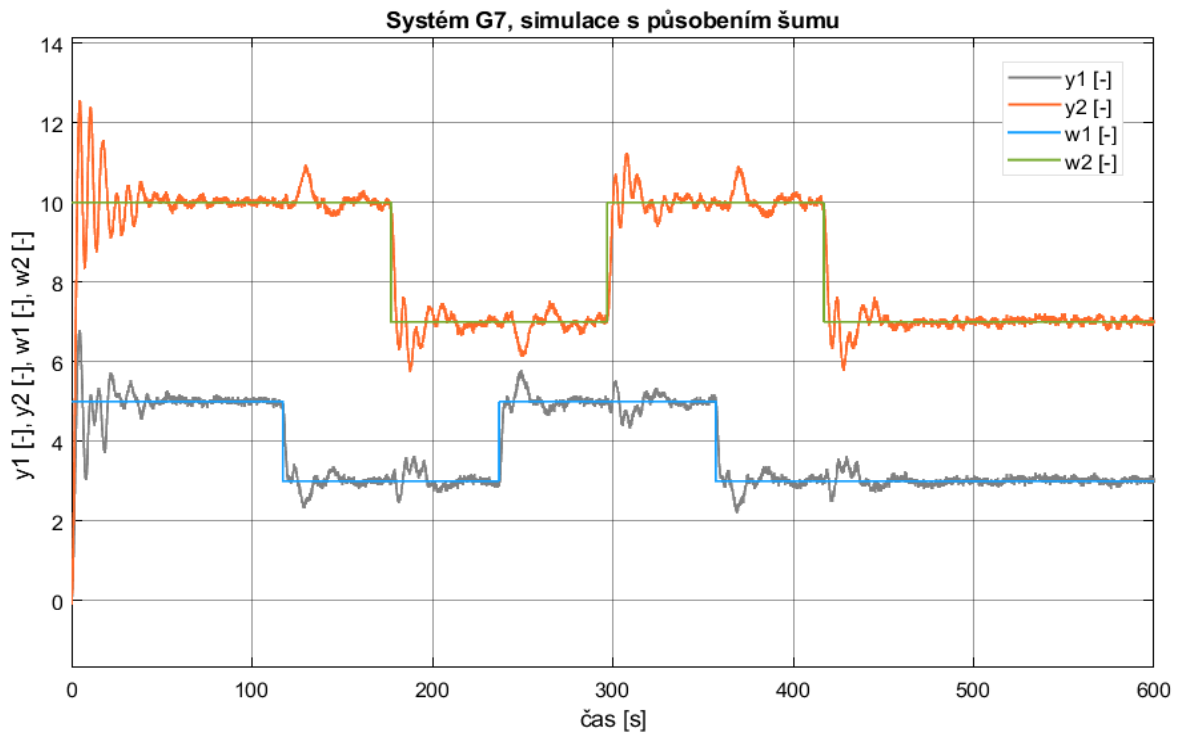


Obrázek 27 Systém  $G_7$ , simulace akční veličiny, bez působení šumu

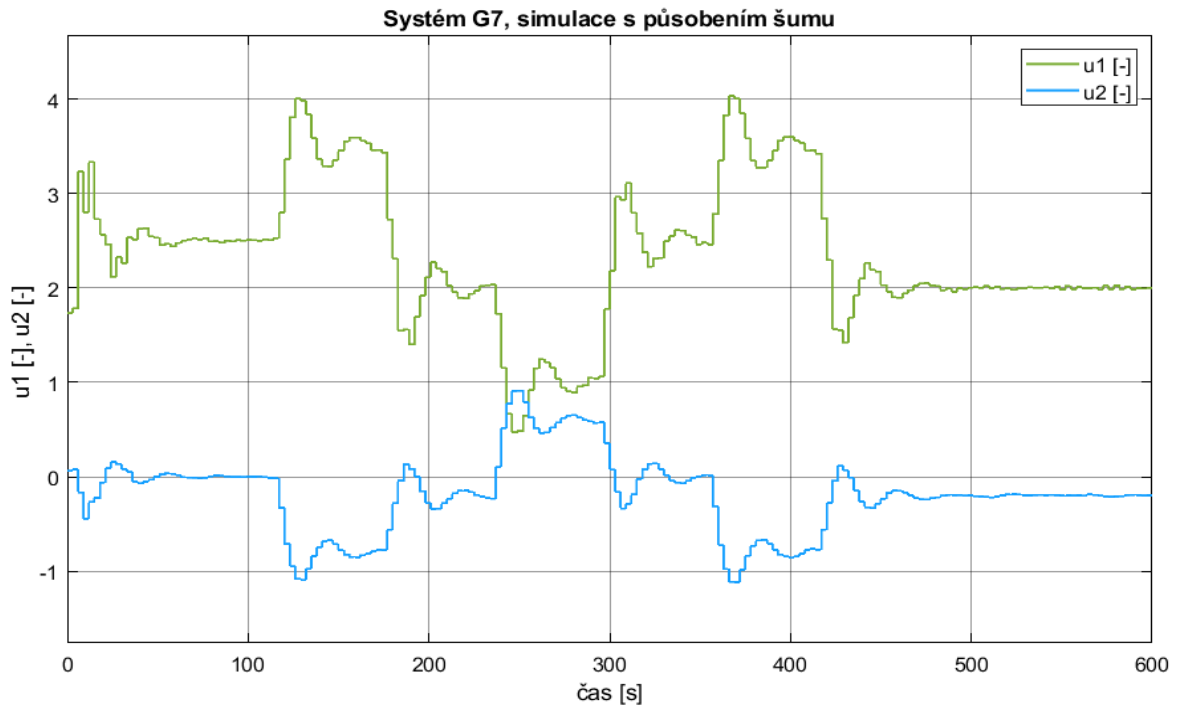
Na obrázcích 26 a 27 je zobrazen průběh řízení systému  $G_7$  bez působení šumu.

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_{u1}(G_{71}) = 0.0999 [-]$ ,  $S_{u2}(G_{71}) = 0.0063 [-]$ .  
 $S_{e1}(G_{71}) = 0.1689 [-]$ ,  $S_{e2}(G_{71}) = 0.5588 [-]$ .

## 4.2.3.2 Simulace s působením šumu



Obrázek 28 Systém G7, simulace požadované a řízené veličiny, s působením šumu



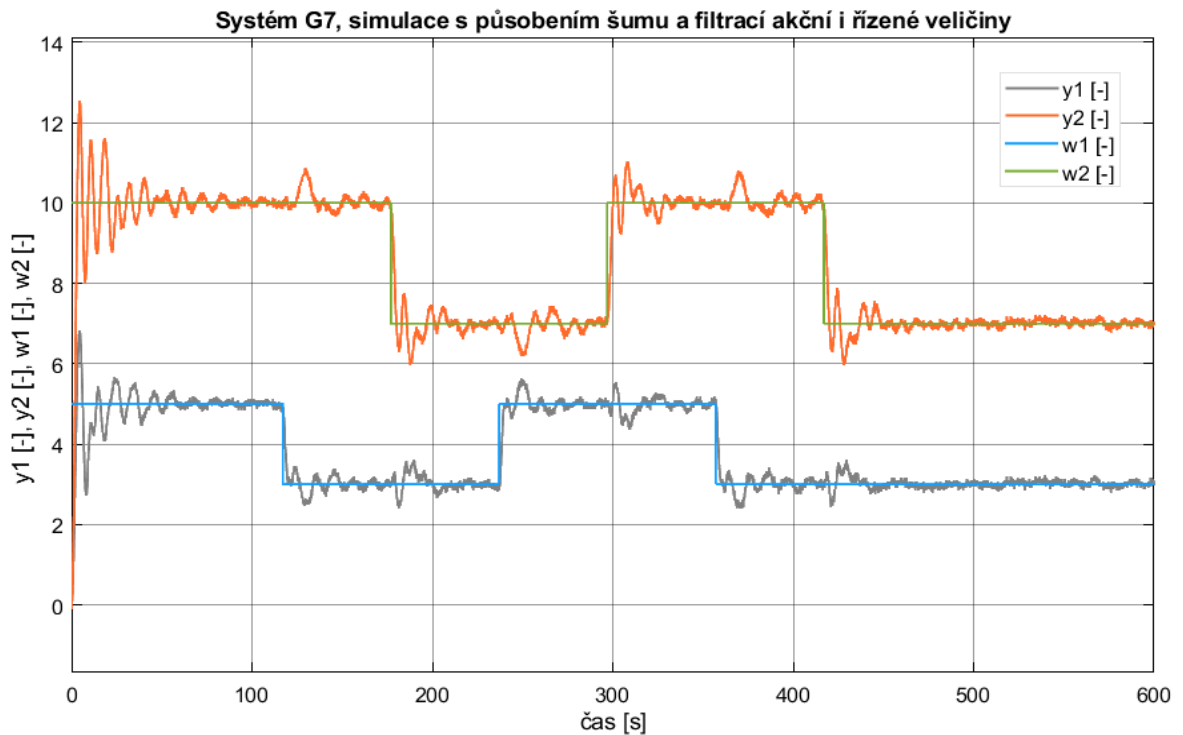
Obrázek 29 Systém G7, simulace akční veličiny, s působením šumu

Na obrázcích 28 a 29 je zobrazen průběh řízení systému  $G_7$  s působením šumu.

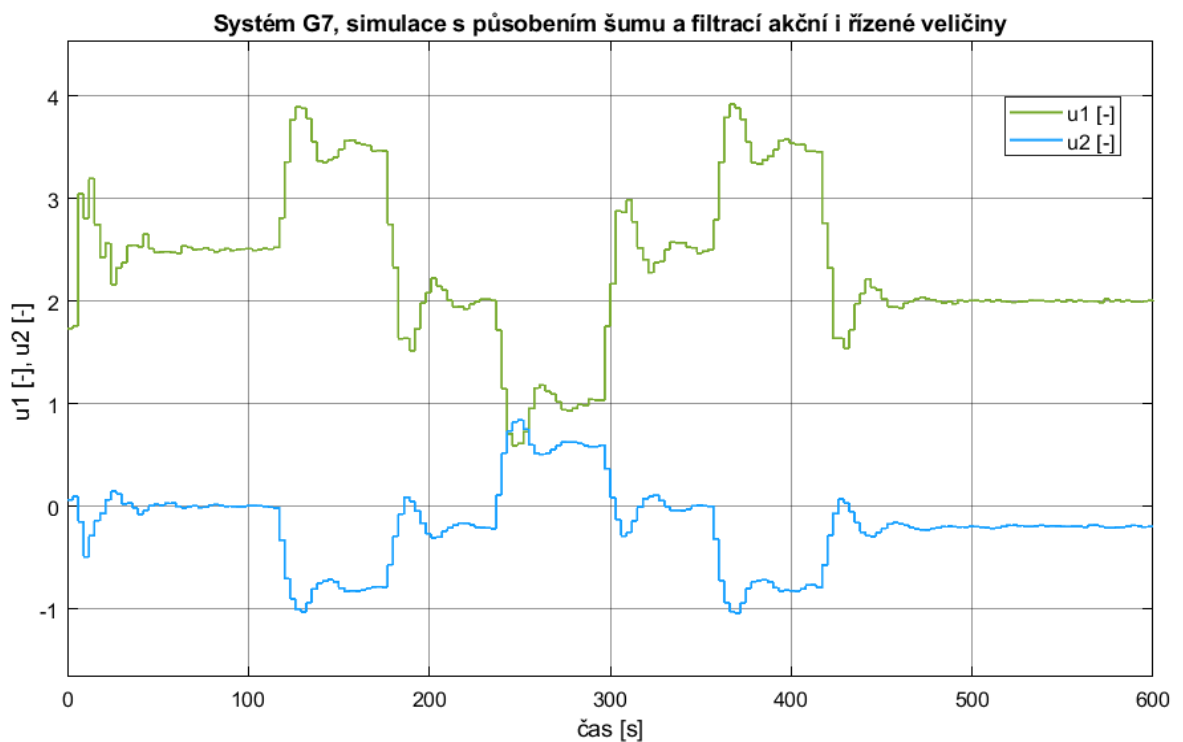
Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_{u1}(G_{72}) = 0.1018 [-]$ ,  $S_{u2}(G_{72}) = 0.0066 [-]$ .

$S_{e1}(G_{72}) = 0.1743 [-]$ ,  $S_{e2}(G_{72}) = 0.5660 [-]$ .

#### 4.2.3.3 Simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny



Obrázek 30 Systém G7, simulace požadované a řízené veličiny, s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny



Obrázek 31 Systém G7, simulace akční veličiny s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny



Na obrázcích 30 a 31 je zobrazen průběh řízení systému  $G_7$  s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny

Hodnoty kritérií kvality regulace jsou  $S_{u1}(G_{73}) = 0.0794 [-]$ ,  $S_{u2}(G_{73}) = 0.0087 [-]$ .  
 $S_{e1}(G_{73}) = 0.1727 [-]$ ,  $S_{e2}(G_{73}) = 0.5657 [-]$ .

Tabulka 7 Systém  $G_7$ , hodnoty kritérií kvality regulace

	Su1 [-]	Su2 [-]	Se1 [-]	Se2 [-]
G7 bez šumu	0.0999	0.0063	0.1689	0.5588
G7 s šumem	0.1018	0.0066	0.1743	0.566
G7 filtrováno	0.0791	0.0087	0.1727	0.5657

V tabulce 6 jsou uvedeny hodnoty kritérií kvality regulace systému  $G_7$ . Je zřejmé, že filtrací dosahujeme zlepšení kvality řízení z hlediska kritéria akční veličiny  $S_{u1}$ , avšak dochází ke zhoršení kvality řízení z hlediska kritéria akční veličiny  $S_{u2}$ . Zároveň také dochází ke zlepšení kvality z hlediska kritérií regulačních odchylek.

### 4.3 Shrnutí výsledků

Tabulka 8 Shrnutí výsledků, kritérium akční veličiny

	Su_šum	Su_filter	změna [%]
G1	1.745	1.4426	17.33
G2	0.8659	0.8471	2.17
G3	0.4722	0.4574	3.13
G4	0.9066	0.8494	6.31
G5	0.2058	0.1797	12.68
G61	0.9443	0.8362	11.45
G62	2.0795	1.9105	8.13
G71	0.1018	0.0791	22.30
G72	0.0066	0.0087	-31.82

Tabulka 9 Shrnutí výsledků, kritérium regulační odchylky

	Se_šum	Se_filter	změna [%]
G1	0.1226	0.1202	1.96
G2	0.1252	0.123	1.76
G3	0.1032	0.101	2.13
G4	0.1124	0.1122	0.18
G5	0.1329	0.1334	-0.38
G61	0.1878	0.1755	6.55
G62	0.6589	0.7576	-14.98
G71	0.1743	0.1727	0.92
G72	0.566	0.5657	0.05

V tabulkách 8 a 9 jsou uvedeny výsledky simulačních experimentů.

Z tabulek je zřejmé, že pro naprostou většinu systémů dosahujeme filtrací zlepšení kvality regulace. Výjimkou jsou TITO systémy, kde dochází ke zhoršení jednoho parametru, ale zároveň dochází ke zlepšení ostatních parametrů. Další výjimkou je pak kmitavý systém  $G_5$ , kde dochází k výraznému zlepšení kritéria akční veličiny, ale zároveň dochází k drobnému zhoršení z hlediska kritéria regulační odchylky. Toto zhoršení je způsobeno tím, že filtrací akční veličiny ovlivňujeme schopnost regulátoru reagovat na kmitavý charakter soustavy.

## ZÁVĚR

Cílem diplomové práce bylo odvození a ověření prediktivních regulátorů s filtrací akční i řízené veličiny. Predikční rovnice byly odvozeny a následně upraveny tak, aby zahrnovaly filtraci vstupních i výstupních veličin. Regulátory byly realizovány v prostředí MATLAB/Simulink jako S-funkce.

Simulační ověřování řízení SISO systémů bylo provedeno na nekmitavých systémech s různými časovými konstantami, kmitavém systému s velkým koeficientem tlumení a kmitavém systému s malým koeficientem tlumení.

Simulační ověřování řízení TITO systémů bylo provedeno na dvou systémech. V prvním případě jsou všechny dílčí přenosové funkce nekmitavé, ve druhém případě jsou pak všechny dílčí přenosové funkce kmitavé.

Simulací většího množství systémů byly porovnány výsledky řízení pro případy bez a s použitím filtrace. Hodnoty filtru jsou nastavitelný parametr, pro jehož nastavení neexistuje žádná zavedená metodika. Filtry byly tedy nastavovány metodou pokus-omyl jako dolní propusti. Je zřejmé, že využitím filtru dosahujeme lepších výsledků kvality regulace. Pro nekmitavé systémy dochází k redukci oscilací akční i řízené veličiny, pro systémy kmitavé pak dochází primárně k redukci oscilací akční veličiny.

Využitím filtru dochází k redukci citlivosti systému na vysokofrekvenční šum, avšak cenou této redukce je složitost nastavování hodnot filtru.

**SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY**

- [1] MIKLEŠ, Ján a Miroslav FIKAR. *Process Modelling, Optimisation, and Control*. 2008. Berlin: Springer-Verlag. ISBN 978-3642091124.
- [2] BOBÁL, Vladimír. *Adaptivní a prediktivní řízení*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008. ISBN 978-80-7318-662-3.
- [3] CAMACHO, Eduardo a Carlo BORDONS. *Model Predictive Control*. London: Springer-Verlag, 2004. ISBN 1-85223-694-3.
- [4] *Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov II*. STU Bratislava, 2004. ISBN 80-227-2134-4.
- [5] ROSSITER, Anthony. *Model Based Predictive Control: a Practical Approach*. CRC Press, 2003. ISBN 0-8493-1291-4.
- [6] CLARKE D.W., MOHTADI, C. and TUFFS, P.S. *Generalized predictive control, part I: the basic algorithm*. Automatica, 23, 1987, 137-148, ISSN 0005-1098.
- [7] CLARKE D.W., MOHTADI, C. and TUFFS, P.S. *Generalized predictive control, part II: extensions and interpretations*. Automatica, 23, 1987, 149-160, ISSN 0005-1098.
- [8] MORARI, M and LEE J.H.. *Model predictive control: past, present and future*. Computers and Chemical Engineering, 23, 1999, 667-682, ISSN 0098-1354

**SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK**

$N_l$	Minimální horizont
$N_2$	Maximální horizont
$N_u$	Řídící horizont
$C$	Barvicí polynom
$n$	Neměřitelná porucha
MPC	Model Predictive Control
SISO	Single Input, Single Output.
TITO	Two Input, Two Output
CARIMA	Controller autoregressive integrated moving average
$\Delta$	$1 - z^{-1}$
$y$	Řízená veličina
$\hat{y}$	Predikce řízené veličiny
$y_f$	Filtrovaná řízená veličina
$u$	Akční zásah
$\Delta u$	Přírůstek akční veličiny
$u_f$	Filtrovaný akční zásah
$e$	Regulační odchylka
$G(s)$	Přenos (s oblast)
$G(z)$	Přenos (z oblast)
$\lambda$	Penalizační faktor
$S_u$	Kritérium stability, akční zásah
$S_e$	Kritérium stability, regulační odchylka

**SEZNAM OBRÁZKŮ**

Obrázek 1 Základní struktura prediktivního regulátoru [2].....	11
Obrázek 2 Princip prediktivního řízení [2] .....	11
Obrázek 3 Menu pro zadání paramerů SISO regulátoru.....	39
Obrázek 4 Systém G1, simulace bez působení šumu .....	40
Obrázek 5 Systém G1, simulace s působením šumu, bez filtrace .....	41
Obrázek 6 Systém G1, simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny .....	42
Obrázek 7 Systém G2, simulace bez působení šumu .....	43
Obrázek 8 Systém G2, simulace s působením šumu .....	44
Obrázek 9 Systém G2, simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny .....	45
Obrázek 10 Systém G3, simulace bez působení šumu .....	46
Obrázek 11 Systém G3, simulace s působením šumu .....	47
Obrázek 12 Systém G3, simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny .....	48
Obrázek 13 Systém G4, simulace bez působení šumu .....	49
Obrázek 14 Systém G4, simulace s působením šumu .....	50
Obrázek 15 Systém G4, simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny .....	51
Obrázek 16 Systém G5, simulace bez působení šumu .....	52
Obrázek 17 Systém G5, simulace s působením šumu .....	53
Obrázek 18 Systém G5, simulace s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny .....	54
Obrázek 19 Menu pro zadání parametrů TITO regulátoru .....	56
Obrázek 20 Systém G6, simulace požadované a řízené veličiny, bez působení šumu .....	57
Obrázek 21 Systém G6, simulace akční veličiny, bez působení šumu.....	57
Obrázek 22 Systém G6, simulace požadované a řízené veličiny, s působením šumu	58
Obrázek 23 Systém G6, simulace akční veličiny, s působením šumu.....	58
Obrázek 24 Systém G6, simulace požadované a řízené veličiny, s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny .....	59

Obrázek 25 Systém G6, simulace akční veličiny s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny .....	59
Obrázek 26 Systém G7, simulace požadované a řízené veličiny, bez působení šumu .....	61
Obrázek 27 Systém G7, simulace akční veličiny, bez působení šumu.....	61
Obrázek 28 Systém G7, simulace požadované a řízené veličiny, s působením šumu	62
Obrázek 29 Systém G7, simulace akční veličiny, s působením šumu.....	62
Obrázek 30 Systém G7, simulace požadované a řízené veličiny, s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny .....	63
Obrázek 31 Systém G7, simulace akční veličiny s působením šumu a filtrací akční i řízené veličiny .....	63

**SEZNAM TABULEK**

Tabulka 1 Systém G1, hodnoty kritérií kvality regulace .....	42
Tabulka 2 Systém G2, hodnoty kritérií kvality regulace .....	45
Tabulka 3 Systém G3, hodnoty kritérií kvality regulace .....	48
Tabulka 4 Systém G4, hodnoty kritérií kvality regulace .....	51
Tabulka 5 Systém G5, hodnoty kritérií kvality regulace .....	54
Tabulka 6 Systém G6, hodnoty kritérií kvality regulace .....	60
Tabulka 7 Systém G7, hodnoty kritérií kvality regulace .....	64
Tabulka 8 Shrnutí výsledků, kritérium akční veličiny .....	65
Tabulka 9 Shrnutí výsledků, kritérium regulační odchylky .....	65



**SEZNAM PŘÍLOH**

P1	CD
P2	CD- s_func_SISO_bez_filtraceG1
P3	CD- s_func_SISO_bez_filtraceG2
P4	CD- s_func_SISO_bez_filtraceG3
P5	CD- s_func_SISO_bez_filtraceG4
P6	CD- s_func_SISO_bez_filtraceG5
P7	CD- s_func_SISO_filtraceG1
P8	CD s_func_SISO_filtraceG2
P9	CD- s_func_SISO_filtraceG3
P10	CD- s_func_SISO_filtraceG4
P11	CD- s_func_SISO_filtraceG5
P12	CD-SISO_s_filtrace
P13	CD- SISO_s_bez_filtrace
P14	CD-MIMO_bez_filtrace_G6
P15	CD- MIMO_bez_filtrace_G7
P16	CD- MIMO_filtrace_G6
P17	CD- MIMO_filtrace_G7
P18	CD-MIMO_filtrace
P19	CD-MIMO_bez_filtrace

## **PŘÍLOHA P I: NÁZEV PŘÍLOHY**

Struktura přiloženého CD:

fulltex.pdf – plný text práce

prilohy.zip – realizované regulátory v prostředí Matlab